A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

VERSEGHY KÖNYVTÁR SZOLNOK 2

Szimmetrikus egyenlőtlenségek egy típusának megoldása

(Udvari Tibor)

A koszinusz-tétel „előáll" a Tabit-tételből

(Ringler András)

Új tankönyvek a 2004/2005-ös tanévre

XII. ÉVFOLYAM 2004

1

MOZAIK

www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Kovács Attila
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 1350 Ft
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltban:
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Szimmetrikus egyenlőtlenségek egy típusának megoldása
Udvari Tibor
tanár, Baja

A koszinusz-tétel „előáll" a Tabit-tételből
Ringler András
egyetemi docens, Szeged

Körsorozatok
Fitos László
főiskolai docens, Esztergom

ÚJ TANKÖNYVEK A 2004/2005-ÖS TANÉVRE

Sokszínű matematika tankönyvcsalád Matematika 12.

Informatika oktatása egy tankönyvcsalád kapcsán

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Udvari Tibor

Szimmetrikus egyenlőtlenségek egy típusának megoldása

A címet olvasván felmerül a kérdés, milyen egyenlőtlenségeket nevezhetünk szimmetrikusnak? Első közelítésben azokat, amelyeknek mindkét oldala a változók egymás közti felcserélésétől nem változik meg. Az ilyen tulajdonságú egyenlőtlenségek sok szép, egyedinek tűnő megoldási ötlettel bizonyíthatók. Ebben a cikkben azt mutatom meg, hogyan lehet olyan bizonyítási módszert találni, amely egységesen kezelhetővé teszi ezeket az egyenlőtlenségeket. Közben a szimmetriájukat is pontosabban meg tudjuk majd határozni.

Bevezetésként nézzünk egy közismert, könnyen megoldható feladatot.

(1) Bizonyítsuk be, hogy $a^2 + b^2 \geq 2ab$ minden nemnegatív valós szám esetén.

A bizonyítás első lépéseként hozzunk minden tagot a bal oldalra, majd vegyük észre, hogy így teljes négyzetet kapunk:

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2.$$

Mivel egy négyzetszám nem lehet negatív, az $(a - b)^2 \geq 0$ egyenlőtlenség biztosan teljesül, ebből pedig a lépések fordított irányú elvégzésével az eredeti egyenlőtlenség kapható meg.

Ez az egyszerű levezetés a szimmetrikus egyenlőtlenségeknél gyakran használható bizonyítási eljárást mutatja meg: rendezzük az egyenlőtlenségben szereplő tagokat egy oldalra, majd próbáljuk meg négyzetté alakítani.

Aknázzuk ki a bizonyítási módszerben rejlő lehetőségeket! Elképzelhető-e, hogy nem egy, hanem két vagy több négyzetszámot hozunk létre az átrendezés után? Próbáljuk meg előbb két négyzetszámmal! Ha ugyanaz a két változó, vagyis $(a - b)^2 + (b - a)^2$ szerepel az egyik oldalon, akkor semmi újat nem kapunk. Ha három változót használunk, például $(a - b)^2 + (b - c)^2$ van az egyik oldalon, akkor kifejtés után nem lesz szimmetrikus az ebből nyerhető egyenlőtlenség. De ha kettő helyett három négyzettel dolgozunk, rátalálhatunk egy, az első példában látotthoz hasonló szimmetrikus egyenlőtlenséget adó esetre.

(2) Bizonyítsuk be, hogy

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

minden nemnegatív valós szám esetén.

Vegyük először mindkét oldal kétszeresét, így az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca.$$

Most rendezzünk mindent a bal oldalra. Megfelelően csoportosítva a tagokat, három teljes négyzet alakítható ki:

$$\begin{aligned} &2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = \\ &= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 = \\ &= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \end{aligned}$$

A négyzetek külön-külön nem lehetnek negatívok, így összegük sem lehet az. Ebből most is következik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

Ugyanezek az átalakítások természetesen több teljes négyzettel is elvégezhetők, így újabb szimmetrikus egyenlőtlenségeket tudunk felállítani és bizonyítani.

Gyakorló feladatok:

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + bc + cd + da$$

minden nemnegatív valós szám esetén.

2. Általánosítsuk az előző egyenlőtlenségeket n tagra!

Térjünk most vissza a két változóval rendelkező egyenlőtlenségekhez. Ha a két oldal kifejezései legalább harmadfokúak, akkor az előző módszert némileg módosítanunk kell.

(3) Bizonyítsuk be, hogy $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ minden nemnegatív valós szám esetén.

Képezzük most is a két oldal különbségét. Látható, hogy most nem tudjuk négyzetek összegére bontani, harmadik hatványok pedig nem biztosítanák, hogy nem negatív a bal oldal. Kiemelésekkel azonban szorzattá bonthatjuk:

$$a^3 - a^2b + b^3 - ab^2 = a^2(a - b) + b^2(b - a) = \\ = (a - b)(a^2 - b^2).$$

Könnyű belátni, hogy $a - b$ és $a^2 - b^2$ ugyanakkor pozitívak, illetve negatívak, így szorzatuk mindig nemnegatív. Ebből pedig már következik az eredeti egyenlőtlenség.

(4) Bizonyítsuk be, hogy $a^4 + b^4 \geq a^3b + b^3a$ minden nemnegatív valós szám esetén.

Végezzük el most is az előző lépéseket:

$$a^4 + b^4 - a^3b - b^3a = a^3(a - b) + b^3(b - a) = \\ = (a^3 - b^3)(a - b).$$

Ugyanúgy, mint a (3) példában, itt is a kapott szorzat két tényezője egyszerre lesz pozitív vagy negatív, tehát a szorzat most is nemnegatív.

Ezeket a feladatokat általában más módszerrel, kisebb-nagyobb ötletek bevetésével is meg lehet oldani. Ahogyan azonban szó volt róla, most elsősorban a közös módszer bemutatása a cél. Ennek a módszernek már most körvonalazódik két fontos eleme: az egyenlőtlenség két oldalának különbségét képezzük, majd ezt a különbséget szorzattá alakítjuk. Mivel nemnegatív számok esetén a pozitív egész kitevős hatványfüggvények szigorúan monoton növekedők, $a^n - b^n$ és $a^m - b^m$ egyszerre lesz pozitív, negatív vagy nulla, így szorzatuk mindig nemnegatív. Az eddigi kétváltozós példák mindegyikében ilyen alakú tényezőkre lehetett bontani a különbséget. Ez a felismerés hozzásegíthet minket újabb szimmetrikus egyenlőtlenségek készítéséhez: induljunk ki két ilyen kifejezés szorzatából, majd rendezzük át a kapott kifejezést.

Gyakorló feladatok:

3. Bizonyítsuk be, hogy

$$a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + b^3a^2$$

minden nemnegatív valós számra.

4. Bizonyítsuk be, hogy

$$a^5 + b^5 \geq a^4b + ab^4$$

minden nemnegatív valós számra.

Természetes kérdés, mi a helyzet akkor, ha kettőnél több változó van az egyenlőtlenségben? Vajon ez a módosított eljárás alkalmazható-e akkor is? Általában igen, de itt már egyre több nehézséggel is találkozhatunk.

(5) Bizonyítsuk be, hogy

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$$

minden nemnegatív valós szám esetén.

Rövid próbálkozás után észre lehet venni, hogy ebben az esetben sem lehet egyszerűen az oldalak különbségét venni, előbb mindkét oldal kétszeresét érdemes előállítani. Az átalakítások után négyzetszámok szorzataiból álló kifejezést kapunk, ami biztosan nemnegatív.

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - 2a^2bc - 2b^2ca - 2c^2ab = \\ = a^2b^2 - 2a^2bc + a^2c^2 + b^2c^2 - 2b^2ca + \\ + b^2a^2 + c^2a^2 - 2c^2ba + c^2b^2 = \\ = a^2(b - c)^2 + b^2(c - a)^2 + c^2(a - b)^2 \geq 0$$

Ha ilyen, biztosan nemnegatív kifejezésekből akarunk előállítani egyenlőtlenségeket, érdekes megfigyelést tehetünk. Például induljunk ki (3) mintájára három változóval felírt kifejezésből. A kapott egyenlőtlenség más lesz, mint az eddigiek:

$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 \geq \\ \geq a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2.$$

Néhány hasonló tapasztalat arra mutat, nem elég a cikk elején megfogalmazott feltétel a szimmetriára. Az egyenlőtlenség mindkét oldalán egyaránt hat tagból álló kifejezés van, ha a bal oldalon nem használjuk a kettes szorzótényezőket.

Az eddigi feladatokban mindig működött a különbségképzés módszere. Van azonban olyan, egyszerűen bizonyítható, ártalmatlannak tűnő egyenlőtlenség, amely egyszerre kételyeket ébreszt a módszerrel kapcsolatban.

(6) Bizonyítsuk be, hogy $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ minden nemnegatív (a, b, c) valós szám esetén.

Hiába a különbség, hiába a kétszeres szorzat, nem tudjuk az előzőeknek megfelelően szor-

zattá alakítani. Ugyanakkor a köbös hatványközép és a mértani közép közti egyenlőtlenségből köbre emeléssel egyszerűen adódik a bizonyítandó összefüggés. Mi lehet a megoldás? Ne egyetlen, hanem két egyenlőtlenséget bizonyítsunk, azzal sikerül az eredeti egyenlőtlenséget is igazolni.

Először bizonyítsuk az előbb már említett egyenlőtlenséget:

$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 \geq$$
$$\geq a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c.$$

Ezt a különbségek átalakításával meg tudjuk tenni:

$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 - a^2b - b^2a - b^2c - c^2b -$$
$$- c^2a - a^2c = (a^3 - a^2b + b^3 - b^2a) +$$
$$+ (b^3 - b^2c + c^3 - c^2b) + (c^3 - c^2a + a^3 - a^2c) =$$
$$= [a^2(a - b) + b^2(b - a)] + [b^2(b - c) +$$
$$+ c^2(c - b)] + [c^2(c - a) + a^2(a - c)] =$$
$$= (a^2 - b^2)(a - b) + (b^2 - c^2)(b - c) +$$
$$+ (c^2 - a^2)(c - a) \geq 0$$

Az egyenlőtlenséget az igazolja, hogy az utolsó átalakítás után az összeg mindhárom tagja olyan szorzat, amelynek tényezői egyszerre lesznek pozitívok, negatívok vagy nullák.

Másodjára bizonyítsuk be, hogy

$$a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c \geq 6abc,$$

ha $a, b, c \geq 0$!

Vegyük megint a két oldal különbségét:

$$a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c - 6abc =$$
$$= (a^2b - 2abc + c^2b) + (b^2c - 2abc + a^2c) +$$
$$+ (b^2a - 2abc + c^2a) = b(a^2 - 2ac + c^2) +$$
$$+ c(b^2 - 2ba + a^2) + a(c^2 - 2cb + b^2) =$$
$$= b(a - c)^2 + c(b - a)^2 + a(c - b)^2 \geq 0.$$

Most az összeg minden tagja olyan szorzat, amelynek tényezői nemnegatívok, tehát összegük sem az.

A két egyenlőtlenség együtt éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget adja.

Most már elég sok tapasztalatot szereztünk a módszerrel kapcsolatban. Ahhoz, hogy az érzékelhető hasonlóságokat általánosíthassuk, és a tapasztalt eltérésekre is magyarázatot találjunk, írjuk fel az egyenlőtlenségeket kicsit másképpen!

Ezek az egyenlőtlenségek szimmetrikusak abban az értelemben, hogy mindkét oldalukon ugyanolyan alakú tagok találhatók. Ha kiegészítjük ezeket a tagokat úgy, hogy mindegyikben szerepeljen mindegyik változó (az eddig hiányzó nulladik hatványként), akkor egyenlőtlenségeink a következő alakot öltik.

(1) $a^2b^0 + b^2a^0 \geq 2a^1b^1$

(2) $a^2b^0c^0 + b^2c^0a^0 + c^2a^0b^0 \geq a^1b^1c^0 + b^1c^1a^0 +$
$+ c^1a^1b^0$

(3) $a^3b^0 + b^3a^0 \geq a^2b^1 + b^2a^1$

(4) $a^4b^0 + b^4a^0 \geq a^3b^1 + b^3a^1$

(5) $a^2b^2c^0 + b^2c^2a^0 + c^2a^2b^0 \geq a^2b^1c^1 + b^2c^1a^1 +$
$+ c^2a^1b^1$

(6) $a^3b^0c^0 + b^3c^0a^0 + c^3a^0b^0 \geq 3a^1b^1c^1$

A (6) bizonyításában használt egyenlőtlenségek:

(6A) $2a^3b^0c^0 + 2b^3c^0a^0 + 2c^3a^0b^0 \geq$
$\geq a^2b^1c^0 + b^2a^1c^0 + b^2c^1a^0 + c^2b^1a^0 +$
$+ c^2a^1b^0 + a^2c^1b^0$

(6B) $a^2b^1c^0 + b^2a^1c^0 + b^2c^1a^0 + c^2b^1a^0 +$
$+ c^2a^1b^0 + a^2c^1b^0 \geq 6a^1b^1c^1$

A kétváltozós eseteknél elég hamar észre lehet venni néhány szabályszerűséget: a kitevők összege mindkét oldal tagjaiban megegyezik. Az (1) jobb oldalán a kettes szorzó magyarázható azzal, hogy itt az a és b a két lehetséges sorrendben szerepel, de a kommutativitás miatt ezek összevonhatók. Ezzel a megfigyeléssel a (6) is értelmezhető. Ahol két változó szerepel, de azonos kitevővel, ott kettes szorzóval, ahol három változó van azonos kitevővel, ott hatos szorzóval, négy változónál huszonnégyes szorzóval számolhatunk annak megfelelően, hogy hány különböző sorrendben írhatók fel a változók. Az összevonások és az esetleges egyszerűsítések után kapjuk az előző alakokat. Az is látható, hogy a kitevők csökkenő (nem növekvő) sorrendben követik egymást.

Ezeket a megfigyeléseket felhasználva, bevezethetünk egy új jelölést. Mivel az egyenlőtlenségekben szereplő betűknek nincs nagyobb jelentősége, legyen $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ az a polinom, amelynek n változója van, és minden tagja $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ alakú, ahol $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a változók valamely permutációja, és minden lehetséges permutáció előfordul (tehát a polinomnak $n!$ tagja van). Követeljük meg azt is, hogy a kitevők csökkenő (nem növekvő) sor-

rendben legyenek. Egyenlőtlenségeink ezzel a jelöléssel így néznek ki.

(1) $P(2, 0) \geq P(1, 1)$

(2) $P(2, 0, 0) \geq P(1, 1, 0)$

(3) $P(3, 0) \geq P(2, 1)$

(4) $P(4, 0) \geq P(3, 1)$

(5) $P(2, 2, 0) \geq P(2, 1, 1)$

(6) $P(3, 0, 0) \geq P(1, 1, 1)$

(6A) $P(3, 0, 0) \geq P(2, 1, 0)$

(6B) $P(2, 1, 0) \geq P(1, 1, 1)$

Most, hogy csak a számokra (lényegében a kitevőkre) kell figyelnünk, megint észrevehetünk valamit. A kitevőket jelző számsorozat mindkét oldalon ugyanannyi elemből áll, ugyanazt az összeget adja, de a két oldal bármelyik kezdő szeletét összehasonlítva a bal oldalon nagyobb (nem kisebb) összeget kapunk. Most már készen áll minden arra, hogy általánosítsuk – az új jelölést is használva – az eddig tapasztaltakat.

Legyen $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ olyan szám n-es, amelynek nemnegatív egész szám elemeire igaz, hogy $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_n$. Ugyanígy legyen $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ olyan szám n-es, amelynek elemeire teljesül a $\beta_1 \geq \beta_2 \geq ... \geq \beta_n$ egyenlőtlenséglánc. Mondjuk azt, hogy α megelőzi β-t, ha:

$\alpha_1 \geq \beta_1$

$\alpha_1 + \alpha_2 \geq \beta_1 + \beta_2$

...

$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{n-1} \geq \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{n-1}$

$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{n-1} + \alpha_n \geq \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{n-1} + \beta_n$

A példák alapján sejtésünk:

Ha α megelőzi β-t, akkor igaz $P(\alpha) \geq P(\beta)$ minden nemnegatív valós számra.

Először nézzük meg a bizonyítást arra az esetre, amikor α és β is kételemű! (Vagyis a kétváltozós egyenlőtlenségeink esetére.) Ha $\alpha_1 = \beta_1$, akkor α és β megegyezik. Legyen ezért $\alpha_1 > \beta_1$, ugyanakkor $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$. Használhatjuk a következő jelöléseket (n, m és r nemnegatív egész számok): $\alpha_1 = n + r$, $\beta_1 = n$, $\alpha_2 = m$, $\beta_2 = m + r$. Csökkenő sorrendnek kell teljesülnie, ezért $n \geq m + r > m$ $(r > 0)$.

Ekkor $P(n + r, m) = a^{n+r}b^m + b^{n+r}a^m$ és $P(n, m + r) = a^n b^{m+r} + b^n a^{m+r}$.

Képezzük a két kifejezés különbségét:

$$a^{n+r}b^m + b^{n+r}a^m - a^n b^{m+r} - b^n a^{m+r} =$$
$$= a^n b^m(a^r - b^r) + b^n(a^m(b^r - a^r) =$$
$$= (a^r - b^r)(a^n b^m + b^n a^m) =$$
$$= (a^r - b^r)(a^{n-m} - b^{n-m})a^m b^m.$$

Mivel a két zárójeles tényező egyszerre lesz pozitív, negatív vagy nulla, a kapott szorzat nem vehet fel negatív értéket. Ebből már következik az állításunk.

Térjünk át a többváltozós esetekre. Jelölje n a változók számát. $P(\alpha)$ és $P(\beta)$ ekkor egyaránt $n!$ tagból áll. Ha α megelőzi β-t, akkor vagy megegyeznek (ez az eset triviális), vagy valamelyik α_i csökkenthető úgy r-rel, hogy valamelyik α_j-t $(j > i)$ r-rel növelve a kapott α' vagy megelőzi β-t, vagy megegyezik vele, ugyanakkor elemei továbbra is csökkenő (nem növekvő) sorrendben maradnak.

Ez azt jelenti, hogy $P(\alpha)$ és $P(\alpha')$ tagjait egyaránt párosíthatjuk úgy, hogy a párokban az i-edik és j-edik helyen ugyanaz a két változó van, csak más sorrendben, míg a többi helyen megegyezik a pár két tagja. Így különbségüket felírhatjuk ezekre a párokra:

$$a^{\alpha_i}b^{\alpha_j}Q + b^{\alpha_i}a^{\alpha_j}Q - a^{\alpha_i - r}b^{\alpha_j + r}Q - b^{\alpha_i - r}a^{\alpha_j + r}Q =$$
$$= (a^{\alpha_i}b^{\alpha_j} + b^{\alpha_i}a^{\alpha_j} - a^{\alpha_i - r}b^{\alpha_j + r} - b^{\alpha_i - r}a^{\alpha_j + r})Q.$$

A zárójelben levő kifejezés a kétváltozós esetnek felel meg, az ottani bizonyítás tehát erre is érvényes. Egy-egy ilyen csökkentést végzünk addig, amíg el nem érjük β-t. Ezt azért tehetjük meg, mert a definiált megelőzési reláció tranzitív.

Most bizonyított tételünk az eddig vizsgált eseteknél általánosabban is használható. A legegyszerűbb kiterjesztést törtkifejezések használatával kapjuk. Az ilyen egyenlőtlenségeket ugyan csak pozitív számokra mondhatjuk ki, de a változók valamelyik közös többszörösével szorozva őket, általában az előbb vizsgált alakúra hozhatók. Nézzünk meg néhány törtes egyenlőtlenséget!

(7) Bizonyítsuk be, hogy $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ minden pozitív valós szám esetén.

Mindkét oldalon *ab*-vel szorozva éppen a már bizonyított (1) adódik.

(8) Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}$$

minden pozitív *a*, *b*, *c* esetén!

Ha $2abc$-vel megszorozzuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát, az eredetivel egyenértékű

$$2a^4+2b^4+2c^2\geq$$
$$\geq a^3b+b^3a+b^3c+c^3b+c^3a+a^3c$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ez megfelel a $P(4, 0, 0)\geq$ $\geq P(3, 1, 0)$ állításnak. Mivel (4, 0, 0) megelőzi (3, 1, 0)-t, ez az állítás igaz.

(9) Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a^3}{b^2c^2}+\frac{b^3}{c^2a^2}+\frac{c^3}{a^2b^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

minden pozitív valós számra!

Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát $2a^2b^2c^2$-tel, a kapott egyenlőtlenség

$$2a^5+2b^5+2c^5\geq 2a^2b^2c+2b^2c^2a+2c^2a^2b$$

lesz. Ez megfelel a $P(5, 0, 0)\geq P(2, 2, 1)$ állításnak. Mivel (5, 0, 0) megelőzi (2, 2, 1)-et, ez az állítás igaz.

További érdekességet jelentenek a törtkitevős, tehát gyököket tartalmazó egyenlőtlenségek. Hogy ezekre is alkalmazható tételünk, legegyszerűbben új ismeretlenek bevezetésével lehet megmutatni.

(10) Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

minden pozitív valós számra.

Legyen $c=\sqrt{a}$ és $d=\sqrt{b}$. Ezekkel a jelölésekkel egyenlőtlenségünk a $\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{c}\geq c+d$ alakot ölti. Ez *cd*-vel való szorzás után a $P(3, 0)\geq P(2, 1)$ állításnak felel meg. Mivel (3, 0) megelőzi (2, 1)-et, ez az állítás igaz.

(11) Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

minden pozitív valós számra!

Legyen $d=\sqrt{a}$, $e=\sqrt{b}$ és $f=\sqrt{c}$. Ezekkel a jelölésekkel egyenlőtlenségünk a

$$\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}+\frac{1}{f^2}\geq\frac{1}{de}+\frac{1}{ef}+\frac{1}{fd}$$

alakot ölti. Ezt $2def$-fel szorozva a $P(2, 2, 0)\geq$ $\geq P(2, 1, 1)$ állítást kapjuk. Mivel (2,2,0) megelőzi (2,1,1)-et, ez az állítás igaz.

Ringler András

A koszinusz-tétel „előáll" a Tabit-tételből

A régi mesterek eredményeinek felidézése számos intellektuális öröm forrása. A már elfelejtett ismeretek tanulmányozása során gyakran találkozhatunk félbeszakadtnak tűnő gondolatokkal, amelyek továbbfűzésével még ma is érdekes eredményekhez juthatunk [1]. Szerencsés az ember, ha így talál meg valamit. Így jártam én is, amikor elolvastam Lévárdi és Sain „Matematikatörténeti feladatok" című munkájában a ≈ 1100 éves Tabit-tételt [2], amelyet a Püthagorász-tétel egyféle általánosításának tekintünk.

Tabit Ibn Korra (826, 901) kitűnő arab kommentátor és fordító volt, aki a lefordított művekbeli bizonyításokat kiegészítette és a tételek egy részét általánosította [2]. A neki tulajdonított tétel felismeréséhez csak a hasonlóság ismeretére volt és van szükség.

A C csúcsánál tompaszögű ABC háromszög a, b és c oldalaihoz rajzoljunk a, b, illetve c oldalú négyzeteket (lásd az 1. ábrát), majd a háromszög C csúcsánál lévő γ szögnél szerkesszük be a rajz szerint feltüntetett α és β szögeket is. Könnyű belátni, hogy az így kapott CDE háromszög egyenlő szárú, amelynek magasságát m, a magasság talppontját pedig C_1 jelöli. További jelölések: $AC_1 = x = b \cdot \cos\alpha$, $C_1B = y = a \cdot \cos\beta$ és $m = b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$. Az ábráról az is látható, hogy az $MNED$ téglalap területe egyenlő a $DE \cdot c$ szorzattal ($EN = AB = c$). Megmutatjuk, hogy az $MNED$ téglalap területe éppen $-2ab\cos\gamma$ ($0° < \gamma < 180°$).

A Tabit-tétel az 1. ábrán látható – itt didaktikai okok miatt C csúcsánál tompaszögű – háromszög jelöléseivel kimondja, hogy:

$$BC^2 + CA^2 = AD \cdot DM + EB \cdot BG = AB \cdot (AD + EB), \quad (DM = BG = AB = c). \quad (1)$$

Ugyanez más jelölésekkel és másképpen is felírva:

$$a^2 + b^2 = AD \cdot c + EB \cdot c = c^2 - DE \cdot c,$$

amelyből

$$c^2 = a^2 + b^2 + DE \cdot c \quad (2)$$

adódik. Itt a $DE \cdot c$ szorzat az $MNED$ téglalap területe. Ha Tabit mester ezt a területet – ≈1100 évvel ezelőtt – kiszámolta volna, akkor a koszinusz-tétel felismerését neki is megköszönhetnénk. Ennek bemutatására – már a mai ismereteinkkel – számoljuk ki az $MNED$ téglalap területét! Az 1. ábrán látható $BC = a$, $AC = b$, $AB = c = AF$, $b \cdot \cos\alpha = AC_1 = x$, $a \cdot \cos\beta = C_1B = y$, $m = a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$ és $ACB\sphericalangle = \gamma$ jelöléseket használva a Tabit mester által ki nem számolt MNED téglalap területére

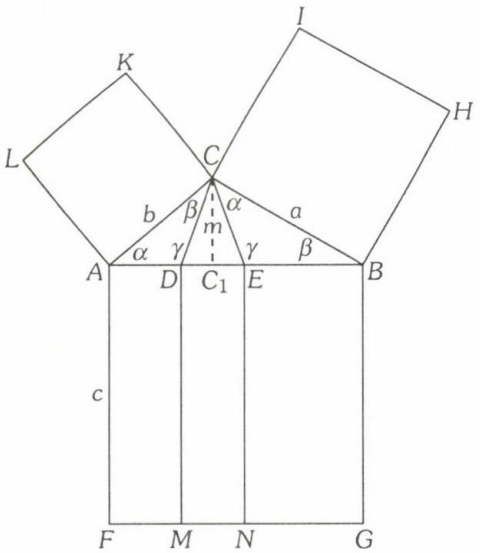
$$DE \cdot c = c^2 - a^2 - b^2 = (x + y)^2 - a^2 - b^2 = 2 \cdot x \cdot y - (a^2 - y^2) - (b^2 - x^2) = 2 \cdot x \cdot y - m^2 - m^2 = 2 \cdot (x \cdot y - m^2) = 2 \cdot (b \cdot \cos\alpha \cdot a \cdot \cos\beta - b \cdot \sin\alpha \cdot a \cdot \sin\beta) = 2 \cdot a \cdot b \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta) = 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha + \beta) = -2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(180 - (\alpha + \beta)) = -2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

adódik. Ezt (2)-be írva megkapjuk a koszinusztétel mai alakját:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

Ezen törvény a Tabit-tételnél egy kicsivel többet állít: a γ szög nagyságától függően ($0° < \gamma < 180°$) megmondja, hogy az $a^2 + b^2$ összeget mekkora értékkel kell módosítani ahhoz, hogy c^2-et kapjunk.

Ha ezen a késői felismerésen Tabit mester már nem csodálkozhat, csodálkozzunk el mi azon, amit végül is megsejtett, illetve elkezdett; de az akkori hiányos ismeretek miatt nem fejezhetett be.



1. ábra

$AB = c$; $AC_1 = x$; $C_1B = y$; $ACB\sphericalangle = \gamma$

A Tabit-tétel bizonyítása

Az 1. ábráról megállapítható, hogy az ABC háromszög hasonló az EBC háromszöghöz, ezért felírható:

$$AB : BC = BC : EB, \Rightarrow BC^2 = AB \cdot EB.$$

Az ABC háromszög hasonló az ADC háromszöghöz is, ezért felírható:

$$AB : AC = AC : AD, \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD.$$

A két egyenlet összeadásával következik:

$$BC^2 + AC^2 = AB \cdot (AD + EB),$$

amely azonos (1)-el.

Irodalom

[1] Filep L.: A tudományok királynője, 1997, TYPOTEX Kft. - Budapest, Bessenyei Kiadó - Nyíregyháza, ISBN 963 7546 83 9.

[2] Lévárdi L. és Sain M.: Matematikatörténeti feladatok, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982, ISBN 963 17 6160 6, pp. 114-115.

Fitos László

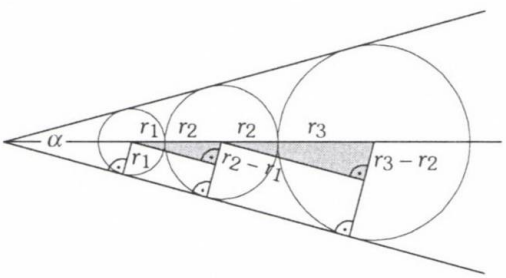
Körsorozatok

Körsorozatnak nevezzük az olyan körök összességét, ahol az egymás után következő körök sugarai, vagy területei sorozatot alkotnak. Ebben a cikkben olyan körsorozatokról lesz szó, amelyekben a sugarak sorozata mértani sorozat. E témakör példái felkelthetik a tanulók érdeklődését, változatosabbá, színesebbé, érdekesebbé tehetik a tanítási órákat.

1. Első példaként tekintsünk egy olyan körsorozatot, amelynek elemei egy 0° és 180° közötti szög mindkét szárát és a szomszédos körök egymást is érintik (1. ábra). Legyen a szög nagysága α, az egymás után következő körök sugara r_1, r_2, r_3, ... és $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots$ Akkor a bevonalkázott háromszögek hasonlósága alapján $\frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} = \frac{r_3 - r_2}{r_2 + r_3}$, amiből $r_2 = \sqrt{r_1 r_3}$, tehát r_2 az r_1 és r_3 mértani közepe. Mivel ez az összefüggés a körsorozat bármely három egymás után következő körének sugara között fennáll, ezért a körsorozat elemeinek sugarai mértani sorozatot alkotnak.

Egyúttal írjunk fel törvényszerű összefüggést az α szög és a körsugarak állandó hányadosa (q) között! Az egyik bevonalkázott derékszögű háromszögből

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} = \frac{\frac{r_2}{r_1} - 1}{1 + \frac{r_2}{r_1}} = \frac{q-1}{q+1} < 1.$$



1. ábra

Ennek alapján megállapíthatjuk, hogy ha az α szög számértéke növekszik és 180°-hoz tart, akkor q értéke is nő és végtelenhez tart, vagyis akármilyen nagy számnál is nagyobb lesz. Néhány érdekes számadat:

q	α
3	60°
10	$109{,}81^\circ$
100	$157{,}16^\circ$
1000	$172{,}76^\circ$

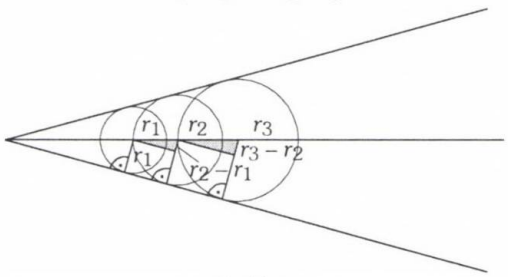
q	α
10000	$177{,}71^\circ$
50000	$178{,}98^\circ$
100000	$179{,}28^\circ$
200000	$179{,}49^\circ$

2. A második példa az elsőtől csak abban különbözik, hogy bármely két szomszédos kör közül a nagyobbik átmegy a kisebbik kör középpontján (2. ábra). A körsugarak ebben az esetben is mértani sorozatot alkotnak. A bizonyítás módszere ugyanaz, mint az első példában, vagyis az ábra hasonló háromszögeire aránypárt írunk fel:

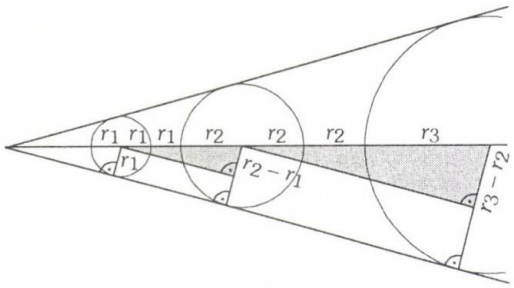
$$\frac{r_2 - r_1}{r_2} = \frac{r_3 - r_2}{r_3}, \quad r_2 = \sqrt{r_1 r_3}.$$

3. A következő példában egy körsorozat körei szintén érintik egy szög mindkét szárát, de most bármely két szomszédos kör olyan távol van egymástól, amekkora a kisebbik kör sugara (3. ábra). Most is az előbbi példákban alkalmazott módon bizonyíthatjuk be, hogy a sugarak mértani sorozatot alkotnak:

$$\frac{r_2 - r_1}{2r_1 + r_2} = \frac{r_3 - r_2}{2r_2 + r_3},$$



2. ábra



3. ábra

amiből

$$3r_2^2 = 3r_1r_3,\quad r_2 = \sqrt{r_1r_3}.$$

4. Ezután egy olyan, általánosítással kapott körsorozatot adunk meg, amelynek az eddig tárgyalt mindegyik körsorozat speciális esete. Ez a következő. A körsorozat mindegyik köre érinti egy szög mindkét szárát és bármely két szomszédos kör (k_n és k_{n+1}) középpontjának távolsága $r_{n+1} + kr_n$, ahol k bármely (–1)-nél nagyobb valós szám. A tárgyalt három körsorozat esetén $k = 1$, $k = 0$ és $k = 2$. Annak bizonyítása, hogy a körsugarak mértani sorozatot alkotnak:

$$\frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+1} + kr_n} = \frac{r_{n+2} - r_{n+1}}{r_{n+1} + kr_{n+1}},$$

amiből

$$(k+1)\cdot r_{n+1}^2 = (k+1)r_n \cdot r_{n+2},$$

vagyis

$$r_{n+1} = \sqrt{r_n \cdot r_{n+2}},$$

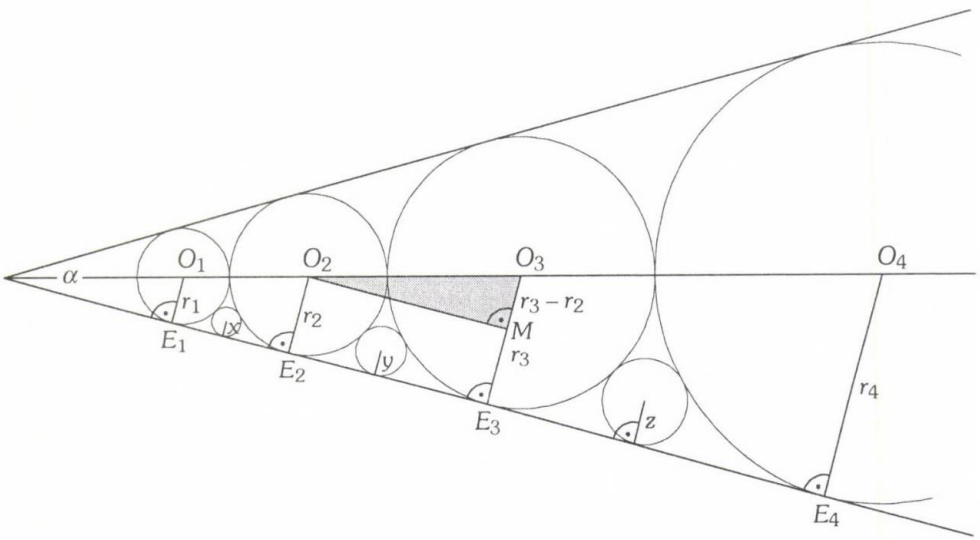
tehát a körsorozat bármelyik eleme a két szomszédos elem mértani közepe. És k értéke azért nem lehet –1, vagy annál kisebb, mert akkor $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{q-1}{q+k}$ 1-nél nagyobb lenne, vagy +1, és egyik sem lehetséges.

5. Utolsó példaként az 1. ábrát kiegészítjük azokkal a körökkel, amelyek a körsorozat 2-2 szomszédos körét és az α szög egyik szárát is érintik (4. ábra). Arra a kérdésre akarunk feleletet kapni, hogy ezek a körök sugarai is mértani sorozatot alkotnak-e, vagy nem. Jelöljük az első három kör sugarát x, y, z-vel és megpróbáljuk ezeket a sugarakat kifejezni a velük érintkező 2-2 kör sugarával, hiszen azokról már tudjuk, hogy mértani sorozatot alkotnak. Legyen továbbá az r_1, r_2, r_3, r_4 sugarú körök középpontja O_1, O_2, O_3, O_4 és az α szög egyik szárán levő érintési pontja ugyanennek a négy körnek E_1, E_2, E_3, E_4, és az y sugarú kör érintési pontja G, végül pedig az O_2 pontból az E_1E_3 szögszárral párhuzamosan húzott egyenesnek az O_3E_3 sugárral való metszéspontja M. Akkor Pitagorász-tétele alapján

$$E_2E_3^2 = O_2M^2 =$$
$$= (r_3 + r_2)^2 - (r_3 - r_2)^2 = 4r_2r_3,$$

vagyis

$$E_2E_3 = 2\sqrt{r_2r_3}.$$



4. ábra

Ugyanígy kapjuk, hogy

$$E_2G = 2\sqrt{r_2 y} \text{ és } GE_3 = 2\sqrt{y r_3}.$$

De $E_2G + GE_3 = E_2E_3$, ezért

$$2\sqrt{r_2 y} + 2\sqrt{y r_3} = 2\sqrt{r_2 r_3}.$$

Ebből

$$\sqrt{y} = \frac{\sqrt{r_2 r_3}}{\sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}},$$

vagyis

$$y = \frac{r_2 r_3}{\left(\sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}\right)^2}.$$

Hasonlóképpen

$$x = \frac{r_1 r_2}{\left(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}\right)^2} \text{ és } z = \frac{r_3 r_4}{\left(\sqrt{r_3} + \sqrt{r_4}\right)^2}.$$

Azt kell bizonyítani, hogy $y = \sqrt{xz}$, azaz

$$\frac{r_2 r_3}{\left(\sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}\right)^2} = \frac{\sqrt{r_1 r_2} \cdot \sqrt{r_3 r_4}}{\left(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}\right)\left(\sqrt{r_3} + \sqrt{r_4}\right)}.$$

A számlálók egyenlők, mivel $r_2 = \sqrt{r_1 r_3}$ és $r_3 = \sqrt{r_2 r_4}$. Nézzük meg, hogy a nevezők is egyenlők-e, vagyis igaz-e, hogy

$$\left(\sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}\right)^2 = \left(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}\right)\left(\sqrt{r_3} + \sqrt{r_4}\right).$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket, azt kapjuk, hogy

$$r_2 + r_3 + 2\sqrt{r_2 r_3} = r_2 + r_3 + \sqrt{r_1 r_4} + \sqrt{r_2 r_3}.$$

Mivel pedig $\sqrt{r_1 r_4} = \sqrt{r_2 r_3}$, mert $\frac{r_4}{r_3} = \frac{r_2}{r_1} = q$, ezért azonosságot kaptunk, amiből az következik, hogy az x, y, z, ... körsugarak is mértani sorozatot alkotnak.

Megjegyzések

1. A tárgyalt típusú körsorozatok csökkenőek is lehetnek, vagyis a köröket a szög csúcsa felé haladva kell megrajzolni. Ebben az esetben a körsugarak csökkenő mértani sorozatot alkotnak, melynek kvociense reciprok értéke annak, ami a növekvő sorozat esetén volt.

2. Akkor is körsorozatot kapunk, ha a 4. pontban tárgyalt általános körsorozatot egészítjük ki olyan körökkel, amelyek a körsorozat 2-2 körét és az α szög egyik szárát is érintik, bármekkora (-1)-nél nagyobb szám is a k paraméter.

Láttuk, hogy ha egy körsorozatban a sugarak mértani sorozatot alkotnak, továbbá a középpontok egy egyenesre illeszkednek és mindegyik kör (az elsőt kivéve) kívülről érinti a vele szomszédos két kört, akkor van olyan szög, amelynek mindkét szárát érinti a körsorozat mindegyik köre.

Ha ezen a tételen csak annyit változtatunk, hogy a körsugarak ne mértani, hanem számtani sorozatot alkossanak, akkor mindig van olyan parabola, amelyet a körsorozat mindegyik köre két pontban érint (esetleg az első kör csak 1 pontban). Most ezt a tételt fogjuk bebizonyítani.

6. Legyen egy körsorozatban a sugarak sorozata pl. 1, 2, 3, ..., n, ... számtani sorozat és a körközéppontok az y-tengely pozitív felére illeszkedjenek úgy, hogy a szomszédos körök érintsék egymást (lásd az 5. ábrát)! Akkor a körök egyenlete sorban:

$$x^2 + (y-1)^2 = 1,\ x^2 + (y-4)^2 = 4,$$
$$x^2 + (y-9)^2 = 9, \ldots$$

A kérdés az, hogy van-e olyan parabola, amely e körsorozat mindegyik körét két pontban érinti és ha van, mi az egyenlete.

Keressük a parabola egyenletét az $y = ax^2 + b$ $(a \neq 0)$ alakban és vegyük hozzá a sorozat első körének az egyenletét, ami $x^2 + (y-1)^2 = 1$. E két egyenletből x^2 kiküszöbölésével kapott másodfokú egyenlet a következő: $\frac{y-b}{a} + y^2 - 2y = 0$, azaz $ay^2 - 2ay + y - b = 0$, vagyis $ay^2 - (2a-1)y - b = 0$. Mivel azonban a két görbe érinti egymást, az így kapott egyenlet diszkriminánsának nullával egyenlőnek kell lennie, azaz

$$(2a-1)^2 + 4ab = 0 \qquad (1)$$

De egy kört végtelen sok parabola érinthet (2 pontban), ezért fölhasználjuk azt is, hogy a keresett parabola a körsorozat második körét is érinti. Tehát e két görbe egyenletéből álló

$$\left.\begin{array}{r} y = ax^2 + b \\ x^2 + (y-4)^2 = 4 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszerből is kiküszöböljük x^2-et és az így adódó y-ban másodfokú egyenlet diszkriminánsát nullával egyenlővé tesszük. Így kapjuk a következő egyenletet:

$$(8a-1)^2 + 4a(12a-b) = 0 \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletből álló egyenletrendszer megoldása: $a = 1$ és $b = -\frac{1}{4}$. Tehát a keresett parabola egyenlete $y = x^2 - \frac{1}{4}$.

Hogy beláthassuk azt, hogy ez a parabola a körsorozatnak nemcsak az első két elemét, hanem bármelyik elemét érinti, bebizonyítjuk, hogy a körsorozat n-edik (n bármely pozitív egész szám) elemét érinti.

A körsorozat n-edik elemének sugara n, középpontjának ordinátája:

$$2(1+2+3+\ldots+n) - n = (n+1)n - n = n^2,$$

tehát az n-edik kör egyenlete:

$$x^2 + (y-n^2)^2 = n^2.$$

E kör és a parabola egyenletéből álló egyenletrendszerből x^2-et kiküszöbölve, a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$y^2 - (2n^2-1)y + n^4 - n^2 + \frac{1}{4} = 0.$$

Mivel pedig ennek az egyenletnek a diszkriminánsa:

$$D = (2n^2-1)^2 - 4n^4 + 4n^2 - 1 =$$
$$= 4n^4 - 4n^2 + 1 - 4n^4 + 4n^2 - 1 = 0,$$

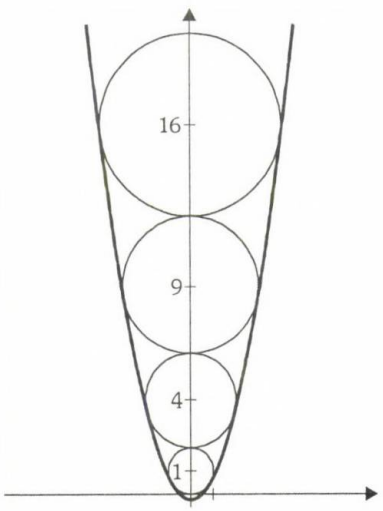
ezért a parabola érinti a körsorozat mindegyik körét.

7. Az $y = x^2$ egyenletű parabolában húzzuk meg növekvő sorrendben azokat a húrokat, amelyek párhuzamosak az x-tengellyel és rácspontokat kötnek össze (6. ábra). A feladat a következő: be kell bizonyítani, hogy bármelyik olyan kör, amelynek középpontja a parabola szimmetriatengelyén van és érint két szomszédos húrt, érinti a parabolát is (az első kör csak egy húrt érint és a parabolát a csúcsában).

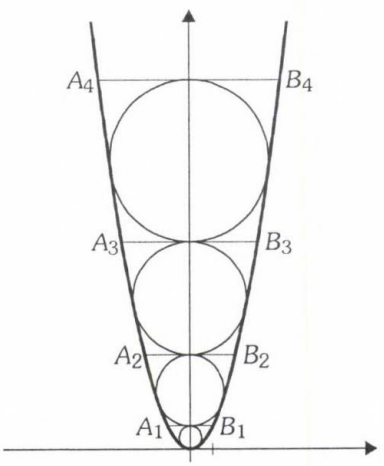
Bizonyítás. Elég, ha általánosságban az n-edik körre (n bármely pozitív egész szám) igazoljuk, hogy érinti a parabolát. A körsugarak sorozata: $r_1 = 0{,}5$; $r_2 = 1{,}5$; $r_3 = 2{,}5$; ...; $r_n = n - 0{,}5$; ... számtani sorozat, az n-edik kör középpontjának ordinátája $1+3+5+\ldots+(2n-1) - r_n = n^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right) = n^2 - n + \frac{1}{2}$,

sugara $n - \frac{1}{2}$, tehát az egyenlete:

$$x^2 + \left(y - \left(n^2 - n + \frac{1}{2}\right)\right)^2 = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2.$$



5. ábra



6. ábra

Ebből és a parabola egyenletéből x^2-et kiküszöbölve a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$y^2 - 2(n^2 - n)y + n^4 - 2n^3 + n^2 = 0.$$

Ennek diszkriminánsa:

$$D = 4(n^2 - n)^2 - 4(n^4 - 2n^3 + n^2)$$

azonosan egyenlő nullával, ezért az n-edik kör érinti a parabolát. De n bármely pozitív egész szám, tehát a körsorozat mindegyik köre érinti a parabolát.

8. A következő körsorozat minden egyes köre az $y = x^2$ egyenletű parabolát a csúcsában érinti és két rácspontban metszi (7. ábra). Azt fogjuk bebizonyítani, hogy a körsugarak másodrendű számtani sorozatot alkotnak.

Az $y = x^2$ egyenletű parabola rácspontjai az első síknegyedben sorban: $P_1(1; 1)$, $P_2(2; 4)$, $P_3(3; 9)$, ..., $P_n(n; n^2)$, ... Az n-edik kör középpontját az OP_n húr felező merőlegese metszi ki az y-tengelyből és a kimetszett körközéppont ordinátája megegyezik a kör sugarával. Az OP_n húr felezőpontja: $F\left(\frac{n}{2}; \frac{n^2}{2}\right)$, felezőmerőlegesének egyenlete: $y - \frac{n^2}{2} = -\frac{1}{n}\left(x - \frac{n}{2}\right)$. Ebben az egyenletben x helyébe nullát helyettesítve kapjuk, hogy $y = \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n^2 + 1}{2}$, vagyis az n-edik kör sugara $r_n = \frac{n^2 + 1}{2}$. Ebből a képletből a körsugarak sorozatát nyilván úgy kapjuk, hogy n helyébe sorban behelyettesítjük a természetes számokat. Ily módon a körsugarak sorozata:

$$1;\ 2{,}5;\ 5;\ 8{,}5;\ 13;\ \ldots$$

Az első különbségi sorozat:

$$1{,}5;\ 2{,}5;\ 3{,}5;\ 4{,}5;\ \ldots,$$

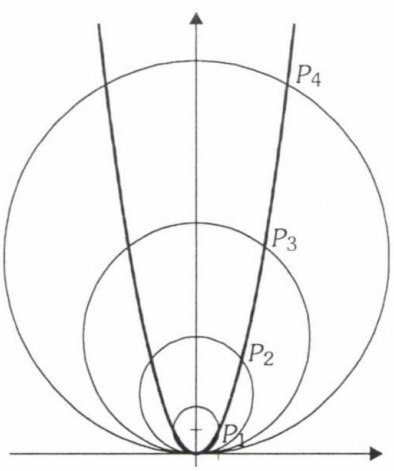
a második különbségi sorozat:

$$1;\ 1;\ 1;\ \ldots$$

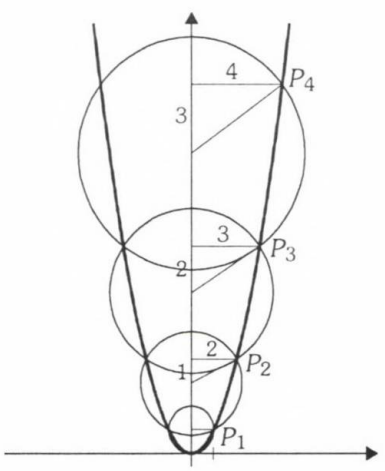
Tehát a körsugarak másodrendű számtani sorozatot alkotnak.

9. Az utolsó példa arról a körsorozatról szól, amelynek elemei az $y = x^2$ egyenletű parabolát az első kör kivételével 2-2 szomszédos rácspontjában metszik és a középpontjuk a parabola tengelyén van (8. ábra). Azt kell bizonyítani, hogy itt a körsugarak nézetei, vagyis a körterületek alkotnak másodrendű számtani sorozatot. Ennek igazolását az olvasóra bízom.

Megjegyzés. A körsorozatok a körsoroktól és a körseregektől legszembetűnőbben abban különböznek, hogy a körsorozatok bármely két eleme között véges számú kör van, vagy egy se, addig a körsorok és körseregek esetében végtelen sok.



7. ábra



8. ábra

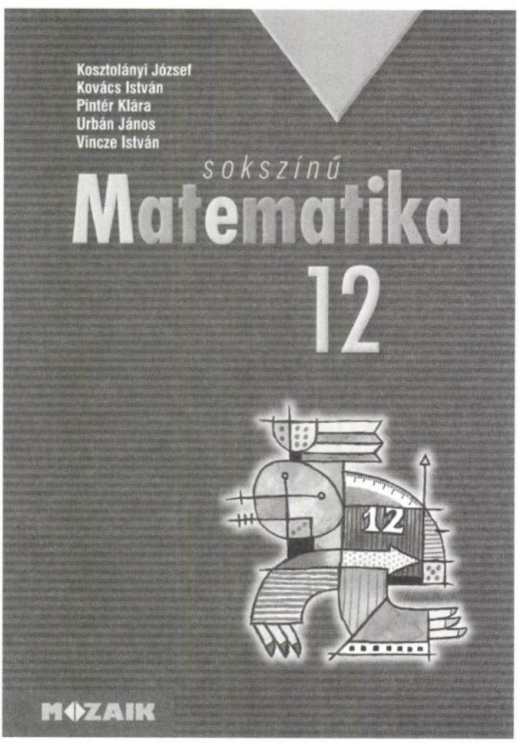
Új tankönyvek a 2004/2005-ös tanévre

Sokszínű matematika tankönyvcsalád

Matematika tankönyv 12. évfolyam

(Szerzők: Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, dr. Urbán János, Vincze István)

Várhatóan **2004 szeptemberére** megjelenik a Sokszínű matematika középiskolás tankönyvsorozat utolsó tagja, a 12. osztályos is. Sajnos, ebben az évben nem lesz benne a hivatalos, OM által kiadott tankönyvjegyzékben a könyv, csak a MOZAIK KIADÓ saját jegyzékében. Ennek oka egyszerűen az, hogy a 11. osztályos tankönyvvel kapcsolatos munkák miatt nem volt arra mód, hogy a 12. osztályos tankönyv végleges, nyomdai formában 2003 májusára elkészüljön, és így bekerülhessen a hivatalos tankönyvjegyzékre kerülést megelőző bírálati eljárásba. Ennek ellenére az eddigi köteteket használó, és azokkal elégedett kollegákat bíztatjuk, hogy bátran rendeljék meg a Mozaik Kiadótól a 12. osztályos tankönyvet a következő tanévre.



A 12. osztályos tankönyv külső képe hasonló az előző három kötetéhez, szerkezete azonban némileg eltér az előzőktől. Ennek oka az, hogy a tanterv szerint a 12. osztályos matematika tananyag döntő része rendszerező összefoglalás. Ezt a tankönyv szerkezete is tükrözi.

A 12. osztályos új anyagrészek – a sorozatok, a térgeometria elemei, és a statisztikai, valószínűségszámítási ismeretek bővítése – mellett a könyv anyagának nagyobbik részét a rendszerező összefoglalás teszi ki.

Például a geometria nagy témakörének rendszerezésekor a logikai kapcsolatok kapnak elsődleges szerepet, nem pedig az a sorrend, ahogyan az évek során a tananyagban egymásra következtek az egyes ismeretek. Az e fajta ismétlés lehetővé teszi, hogy a matematika középiskolai anyagáról új szemléletű, egységes képet kapjon az érettségire készülő tanuló. Természetesen ekkor is fontos az elméleti anyag kiegészítése, elmélyítése feladatok megoldásával. A tankönyv erre is ad útmutatást és tűz ki feladatokat.

Az elmondottak illusztrálására lássunk két példát. Az elsőt a geometria tananyagának ismétlésekor, rendszerezésekor találjuk meg.

3. Hasonlósági transzformáció.

Definíció: A középpontos hasonlósági transzformáció és egybevágósági transzformáció egymás utáni végrehajtásával kapott transzformációkat ***hasonlósági transzformációknak*** nevezzük.

A hasonlósági transzformáció tulajdonságai

(1) A hasonlósági transzformáció **egyenest egyenesbe** transzformál.

(2) A hasonlósági transzformáció **szögtartó** transzformáció.

(3) A λ arányú hasonlósági transzformáció esetén bármely A, B pontokra és A', B' képeikre teljesül, hogy $\frac{A'B'}{AB} = |\lambda|$.

(4) Ha $|\lambda| = 1$, akkor a hasonlósági transzformáció egybevágósági transzformáció.

◊ ◊ ◊

4. Alakzatok hasonlósága

Definíció: Két alakzat ***hasonló,*** ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikba viszi. (A hasonlóság jele: ~.)

Háromszögek hasonlóságának alapesetei

Tétel: Két háromszög akkor és csak akkor hasonló, ha a következő feltételek egyike teljesül:

(1) megfelelő oldalaik hosszának aránya páronként egyenlő,

(2) két-két oldalhosszuk aránya egyenlő és az ezek által közrefogott szögek egyenlők,

(3) két-két szögük páronként egyenlő,

(4) két-két oldalhosszuk aránya egyenlő és e két-két oldal közül a nagyobbikkal szemközt levő szögek egyenlők.

Sokszögek hasonlósága

Tétel: Két sokszög akkor és csak akkor hasonló, ha megfelelő oldalhosszaik aránya páronként egyenlő és megfelelő szögeik páronként egyenlők.

◊ ◊ ◊

Hasonló síkidomok területének, hasonló testek térfogatának aránya

Definíció: Két hasonló alakzat ***hasonlóságának aránya*** az egymásnak megfelelő szakaszok hosszának aránya.

Tétel: Hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő.

$$\frac{T'}{T} = \lambda^2$$

Tétel: Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével egyenlő.

$$\frac{V'}{V} = \lambda^3$$

◊ ◊ ◊

Másik példaként a sorozatok, függvények témakör rendszerező összefoglalásából választottunk ki egy részletet. Ebben az eddig ismerteken kívül új, egységesítő fogalmak (elnevezések) is szerepelnek.

1. A függvény grafikonja, egyszerű tulajdonságai

A függvény a matematika egyik központi, egységesítő fogalma. A geometriai transzformációktól a hosszúság, terület, térfogat fogalmáig, a kombinatorikától a valószínűségszámításig találkozunk a függvényekkel.

Definíció: Ha A és B nem üres halmazok, és adott egy hozzárendelés, amely A minden eleméhez B valamelyik elemét rendeli hozzá, akkor egy függvényről beszélünk. Ezt a 3 dolgot: A-t, B-t és a hozzárendelést együtt egy függvénynek nevezzük, és egy betűvel pl. f-fel jelöljük.

Az A halmaz az f függvény ***értelmezési tartománya,*** a B az f függvény egy képhalmaza, és az A elemeihez rendelt B halmazbeli elemek halmazát gyakran röviden így jelöljük: $f(A)$, ez a halmaz f ***értékkészlete.***

Ha $x \in A$, akkor az x-hez rendelt B-beli értéket így jelöljük: $f(x)$, és az x-hez rendelt, vagy másképpen az x helyen felvett ***függvényérték***nek nevezzük.

Szokásos jelölések még: $A = D_f$, $f(A) = R_f$. Az f függvényt röviden így is jelölik: $f: A \to B$.

Példák függvényekre

1. Legyen az A halmaz a sík négyzeteinek halmaza, B a valós számok halmaza, és rendeljük hozzá minden négyzethez a területét. Ezzel egy függvényt adtunk meg.

2. Legyen A is és B is a sík pontjainak halmaza, $\mathbf{v}$ pedig egy adott vektor a síkban. Rendeljük hozzá minden $P \in A$-hoz azt a $Q \in B$-t, amely P-ből a $\mathbf{v}$-vel való eltolással keletkezik.

3. Legyen $A = \{1, 2, ..., n\} = B$ és legyen i_1, i_2, ..., i_n az 1, 2, ..., n számok egy permutációja. Rendeljük hozzá k-hoz i_k-t ($k = 1, 2, ..., n$). Az adott permutáció tehát egy olyan függvénnyel jellemezhető (azonosítható), amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete is A, és a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű. Tudjuk már előző tanulmányainkból, hogy az ilyen tulajdonságú függvények száma $n!$.

4. Legyen az A halmaz egy szabályos dobókocka dobásakor adódó lehetséges eredmények halmaza, B pedig a $[0; 1]$ zárt intervallumbeli valós számok halmaza. Az A minden elemének feleltessük meg az $\frac{1}{6}$ számot (az illető esemény valószínűségét). Az így értelmezett függvényt a valószínűségszámításban ***valószínűségi változó***nak nevezik.

5. Legyen az A és B is a valós számok halmaza. Rendeljük hozzá minden valós számhoz az egész részét. A kapott függvényt jelöljük f-fel.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = [x]$$

f értékkészlete az egész számok $\mathbb{Z}$ halmaza.

6. Legyen $A = [0; 1]$, $B = \mathbb{R}$, és jelölje g a következő függvényt:

$$g: A \to \mathbb{R}, \quad g(x) = [x].$$

g értékkészlete a $\{0; 1\}$ kételemű halmaz.

Az 5. és 6. példában szereplő f és g függvények különbözők, bár szoros kapcsolat van közöttük. Azt mondjuk, hogy f a g *kiterjesztése*, vagy fordítva, g az f ***leszűkítése.***

Definíció: Ha $f: A_1 \to B$ és $g: A_2 \to B$ két függvény, továbbá $A_2 \subset A_1$ és minden $x \in A_2$-re $f(x_2) = g(x_2)$, akkor azt mondjuk, hogy f kiterjesztése g-nek, illetve g leszűkítése f-nek.

Érdemes még megemlíteni a függvények következő speciális típusait, amelyek gyakran fontos szerepet játszanak.

Ha az $f: A \to B$ függvényre teljesül, hogy minden $b \in B$-hez van olyan $a \in A$, hogy $f(a) = b$, akkor f ***szürjektív.***

Ha az $f: A \to B$ függvényre teljesül, hogy minden $a_1 \neq a_2$, $a_1, a_2 \in A$ esetén $f(a_1) \neq f(a_2)$, akkor f ***injektív.***

Ha egy függvény injektív is és szürjektív is, akkor a függvényt ***bijektív***nek nevezzük.

Egy bijektív függvény kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést jelent az A és B halmaz elemei között. Ha $A = B$, akkor egy bijektív leképezést szokás az A egy permutációjának is nevezni.

Például az

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$ függvény szürjektív, (de nem injektív),
2. $g: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ függvény injektív (de nem szürjektív),
3. $h: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $h(x) = x^2$ függvény bijektív.

A mellékelt példákból is látható, hogy a rendszerező összefoglalásban igen fontos, hangsúly van a fogalmak világos, sokoldalú bemutatásán, elmélyítésén. Példákon és ellenpéldákon keresztül, a fogalmak tágabb kapcsolatát is bemutatva törekszik a könyv a megértésre, a helyes alkalmazások megismertetésére.

Mindezzel az eredményes, sikeres érettségire való felkészülést kívánjuk szolgálni.

Dr. Urbán János

Informatika tankönyvcsalád
Az informatika oktatása egy tankönyvcsalád kapcsán

Hazánkban a számítástechnika oktatása közel 40 éves múltra tekinthet vissza. Oktatási rendszerünk az elmúlt években erőteljesen átalakult: az informatika az elszórt kísérletek után önálló tantárggyá vált, majd a 2001/2002-es tanévtől kezdődően kötelező lett mindenhol e terület oktatása. Az oktatandó tananyagot és a hozzá szükséges óraszámokat már az ős-NAT, majd a kerettanterv is megszabta. A NAT felülvizsgálata eredményeképpen megjelent NAT 2003 tizenkét éves tervezett bevezetési időtartamával természetes módon „homályosabb" és „sejtelmesebb" módon fogalmazta meg a fejlesztési célokat. E tantervet inkább tekinthetjük a várható fejlődési irányok jóslatának az Informatika területén, mint reális és valóban végrehajtandó és vegrehajtható tervezetnek.

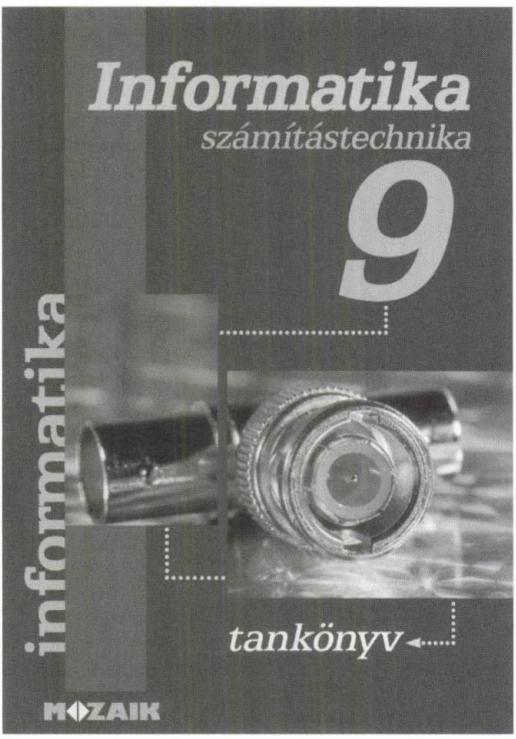
Az új NAT magtanterv jellege miatt véleményem szerint hosszú távon nem is annyira előírás, mint inkább munkaerőpiaci elvárás, az EU-ban várhatóan preferált ECDL vizsgarendszerrel való kompatibilitás megfogalmazása. A bolognai folyamat hatására fokozatosan átalakuló felsőoktatás hozta a legújabb változást: egyértelművé vált, hogy csak a középfokú oktatásra alapozva képzelhető el a diploma megszerzéséhez szükséges informatikaoktatás tömeges méretekben. E folyamatot és elvárást mutatja, hogy az OM jelenlegi irányítói szeretnék, ha 2006-ra az érettségizők 30%-a legalább középfokon megmérettetné tudását az érettségin informatikából. Ez eléggé markánsan jelzi, hogy az informatika felnőtté vált, sőt elismert tárgy lett, és az oktatásának egyik célja a kétszintű érettségi követelményeire való felkészítés. Persze ennek az elvárásnak a jelenleg érvényben lévő középiskolai kerettantervi óraszámok erőteljesen „betartanak", jóllehet ezek mellett kell(ene) a felkészítést már most is megoldani.

A társadalmi, munkáltatói igényekre a felsőoktatás minden képzési irányban egyre inkább próbál építeni arra az alkalmazás-centrikus informatikai tudásra, amit a diákoknak a középiskolából kell magukkal hozniuk. Az áttolódásnak egyik fő oka, hogy a felsőoktatás képtelen biztosítani a hallgatóknak a diploma megszerzéséhez szükséges, elvárható informatikai

alapképzettséget. A másik ok, hogy a hallgatók igénye is megnőtt a számítógép használatára, ezzel viszont a képzési helyek már most sem tudnak lépést tartani, és elegendő munkaállomást biztosítani már a nappali képzésben sem, nemhogy továbbképzésben részt venni kívánók számára. A végképp reménytelen helyzet az önképzésben alakult ki: aki nem tudja maga megteremteni maga számára a számítógépes infrastruktúrát, az nem is tud részt venni a képzésben. Az infrastruktúra megteremtéséhez részben segítséget nyújthat a Sulinet Expressz akció, de ennek célcsoportja sem igazán jól definiált, sőt egyre inkább elkenődötté válik.

MOZAIK tankönyvcsaládja

A sejthető változásokra és irányokra a Mozaik Kiadó által megjelentetett informatika tankönyvcsalád már évekkel ezelőtt elkezdett felkészülni. Tankönyveink és munkafüzeteink már az 5. évfolyamtól kezdve bevezetik a tanulókat az informatika rejtelmeibe, és egészen a 12. évfolyamig biztosítják az új NAT-ban is megfogalmazott kompetenciák átadását. A jelenlegi, alapvetően egységes alapfokú és négyfelé váló középiskolai képzéshez igazodva a tankönyvcsalád mindenkinek szól.



Az Informatika megnevezés magában foglalja a számítástechnika mellett a könyvtárhasználat oktatását is. Ezt a mai napig sokan nyűgnek tekintik, jóllehet szerintem ez a házasság ugyan némi kerítéssel jött létre, de a pár már odaadó és egyenrangú, boldog kapcsolatban él. Ezen kis képzavar után talán érthetőbb, hogy miért döntöttünk úgy, hogy a korábban külön megjelenő – a világszerte is kuriózumnak számító – Kokas Károly által írt Könyvtárhasználat könyvet miért is integráltuk a Számítástechnika tankönyvekbe. Az egyre inkább dominánssá váló internet értő és aktív használata, az alkalmazásokban a források etikus(!) és szakszerű kezelése mind-mind klasszikus könyvtárhasználati ismereteket feltételez, amit csak így továbbíthatunk kellő hitelességgel. Ez persze nem jelenti azt, hogy ez az ismeretanyag nem tanítható más tantárgy keretében, sőt! Az egyre gyakrabban megfogalmazott elvárás éppen az, hogy minél inkább integrálódjon a napi gyakorlatba a megszerzett tudás.

Az általam írt és szerkesztett tankönyvcsalád tagjai a fenti tények figyelembevételével készültek el – és fejlődnek évről évre, mert az informatika oktatása ezt szinte kötelezően elvárja.

A könyvek – és a hozzájuk szervesen kapcsolódó munkafüzetek – általános ismereteket nyújtanak, kellő alapot adnak az informatikát a gyakorlatban is használni kívánók számára. Emellett a sorozat tagjai megfelelnek alapként az informatikát érettségi tárgyként választók számára is.

Rozgonyi-Borus Ferenc

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2004. március 31.

240. Egy körvonalon kijelöltünk 2004 pontot. Hány konvex sokszöget határoznak meg ezek a pontok?

241. Az a, b, c pozitív egész számokról tudjuk, hogy (1) $b \mid a^3$; (2) $c \mid b^3$; (3) $a \mid c^3$. Bizonyítsuk be, hogy $abc \mid (a+b+c)^{13}$!

242. Egy egységnyi befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögvonal minden egyes pontját kiszínezzük négy különböző szín valamelyikével. Mutassuk meg, hogy van a háromszögvonalon két olyan pont, amelyek azonos színűek, és távolságuk legalább $2-\sqrt{2}$!

243. Az $\{a_n\}$ szigorúan növekvő sorozat pontosan azon pozitív egész számokból áll, amelyek sem nem négyzetszámok, sem nem köbszámok. Határozzuk meg a sorozat 2004-edik tagját!

244. Periodikus-e a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \sum_{k=1}^{2004} \cos\left(x\sqrt{k}\right)$ függvény?

Feladatmegoldások (225-229. feladatok)

225. Az A pozitív egész szám ugyanazon számjegyekből áll, mint a B pozitív egész szám. (A számjegyei a B számjegyeinek egy permutációjaként állnak elő.) Igaz-e, hogy a $2A$ és $2B$ számokban ugyanannyi a számjegyek összege?

Megoldás: A számjegyeket 2-vel szorozva az eredményben az egyesek helyén 0, 2, 4, 6, 8 állhat, a tízesek helyén legfeljebb 1. Ebből adódóan hagyományosan szorozva a számokat 2-vel, az egyes helyi értékeken álló számjegyek összeadásának fázisában nem lesz újabb tízes átlépés. Ez pedig azt jelenti, hogy mivel A és B számjegyei megegyeznek, ezért a szorzásból adódó tízes átlépések száma is ugyanannyi. Ebből viszont következik, hogy $2A$ és $2B$ számjegyeinek összege egyenlő.

Több megoldás alapján

Megjegyzés: Ha A számjegyei B számjegyeinek egy permutációjaként állnak elő, és $k \in \{10^n; 2 \cdot 10^n; 5 \cdot 10^n\}$, ahol n természetes szám, akkor kA számjegyeinek összege egyenlő kB számjegyeinek összegével.

Csorba Ferenc, Győr
Rakonczai György, Budapest

A megoldók száma: 10.

226. Melyek azok az ABC háromszögek, amelyekben a $\frac{BC}{AC}$ arány pozitív egész szám, és az AB, valamint az AC oldal A-hoz közelebbi harmadoló pontjain átmenő egyenes érinti a háromszög beírt körét?

Bíró Bálint, Eger

Megoldás: Legyen $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, valamint az AB, illetve AC oldalak A-hoz közelebbi harmadoló pontja P, illetve Q (*1. ábra*).
A párhuzamos szelők tételének megfordítása és a párhuzamos szelőszakaszok tétele értelmében $PQ = a/3$.

A feladat feltételeiből adódik, hogy $b = n \cdot a$ ($n \in \mathbb{Z}^+$), és a $PBCQ$ négyszög érintőnégyszög. Ezek alapján

$$a + \frac{a}{3} = \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c,$$

ahonnan $2a = b + c = n \cdot a + c$, ami átrendezve

$$(2 - n) \cdot a = c.$$

Ennek az egyenletnek csak $n = 1$ esetén van értelme, és ekkor $a = b = c$, azaz a háromszög szabályos. Könnyen igazolható, hogy a szabályos háromszög valóban megfelel a feltételeknek.

Kiss Zoltán, Pécs
Rakonczai György, Budapest

A megoldók száma: 11.

227. Jelölje az ABC háromszög magasságpontját M, súlypontját S, Feuerbach-körének középpontját pedig F. Legyen $P \in \{M, S, F\}$ tetszőleges. Tekintsük a PAB, PBC és PCA háromszögeket, és tekintsük mindhárom háromszög magasságpontját, súlypontját és Feuerbach-körének középpontját. Legyen A' a PBC, B' a PAC, C' pedig a PAB háromszögben valamelyik felsorolt középpont, de mindegyikben azonos típusú. Igaz-e, hogy az $A'B'C'$ háromszög mindig hasonló az ABC háromszöghöz?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Megoldás: A kérdés megválaszolásához 9 vizsgálatot kell végezni. Ezen vizsgálatokat és az egyes esetekben a feladat kérdésére adott válaszokat foglalja rendszerbe az alábbi táblázat. Feltesszük, hogy a PAB, PBC, PCA háromszögek nem elfajulók, ugyanis bizonyos speciális esetekben nincs értelme a feladat kérdésének.

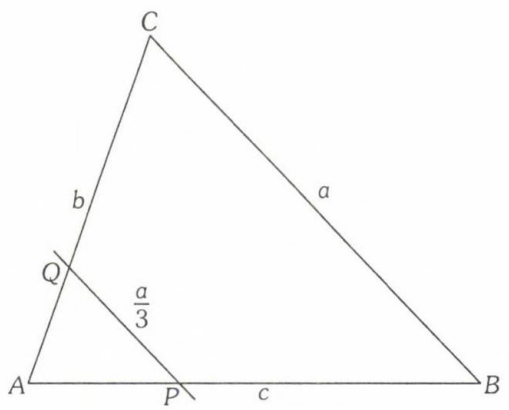
Az $A'B'C'$ háromszögek csúcspontjai	Az ABC háromszög P pontja		
	M	S	F
magasságpontok	(1) igaz	(4) hamis	(7) hamis
súlypontok	(2) igaz	(5) igaz	(8) igaz
Feuerbach-körök középpontjai	(3) hamis	(6) hamis	(9) hamis

(1) eset: Könnyen igazolható, hogy az ABC háromszög csúcsai és M magasságpontja olyan pontnégyest alkotnak, amelyre teljesül, hogy bármelyik három által meghatározott háromszög magasságpontja a negyedik pont. Ekkor tehát az $A'B'C'$ háromszög megegyezik az ABC háromszöggel.

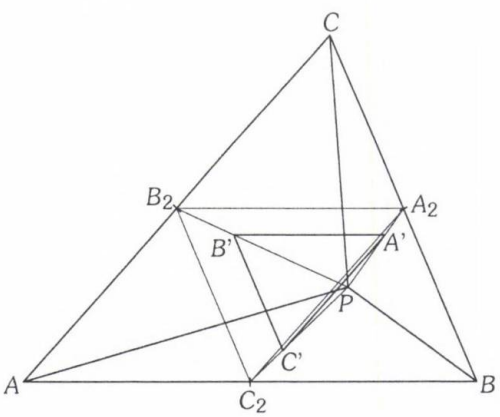
(3) eset: Az előző esethez hasonlóan ismert, és könnyen igazolható tény, hogy az ABC, MAB, MBC, MCA háromszögek Feuerbach-körei megegyeznek, így ebben az esetben $A' = B' = C'$, azaz a vizsgálandó háromszög nem jön létre. (Feltesszük, hogy az ABC háromszög nem derékszögű.)

(2), (5) és (8) esetek: Belátjuk, hogy a háromszög síkjának tetszőleges P pontját választva (úgy, hogy nem illeszkedik egyik oldalegyenesre sem) a kapott PAB, PBC és PCA háromszögek súlypontjai által meghatározott $A'B'C'$ háromszög hasonló az eredeti ABC háromszöghöz.

A P középpontú, $\frac{2}{3}$ arányú középpontos hasonlóság az ABC háromszög A_2, B_2, C_2 oldalfelező pontjait rendre az A', B', C' pontokba viszi (*2. ábra*).



1. ábra



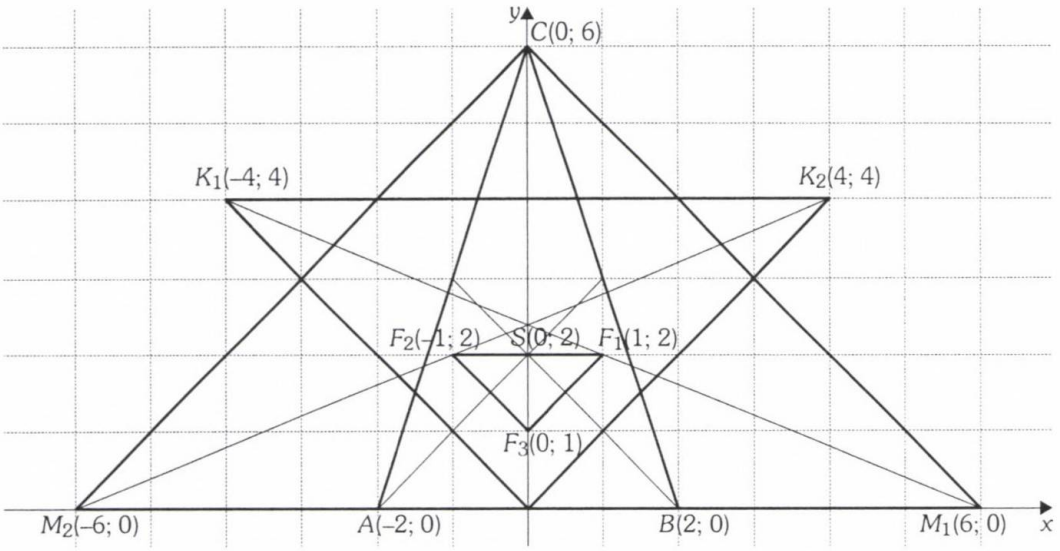
2. ábra

Mivel $ABC_{\triangle} \neq A_2B_2C_{2\triangle}$, ezért a hasonlóság tranzitivitásából adódik az állítás.

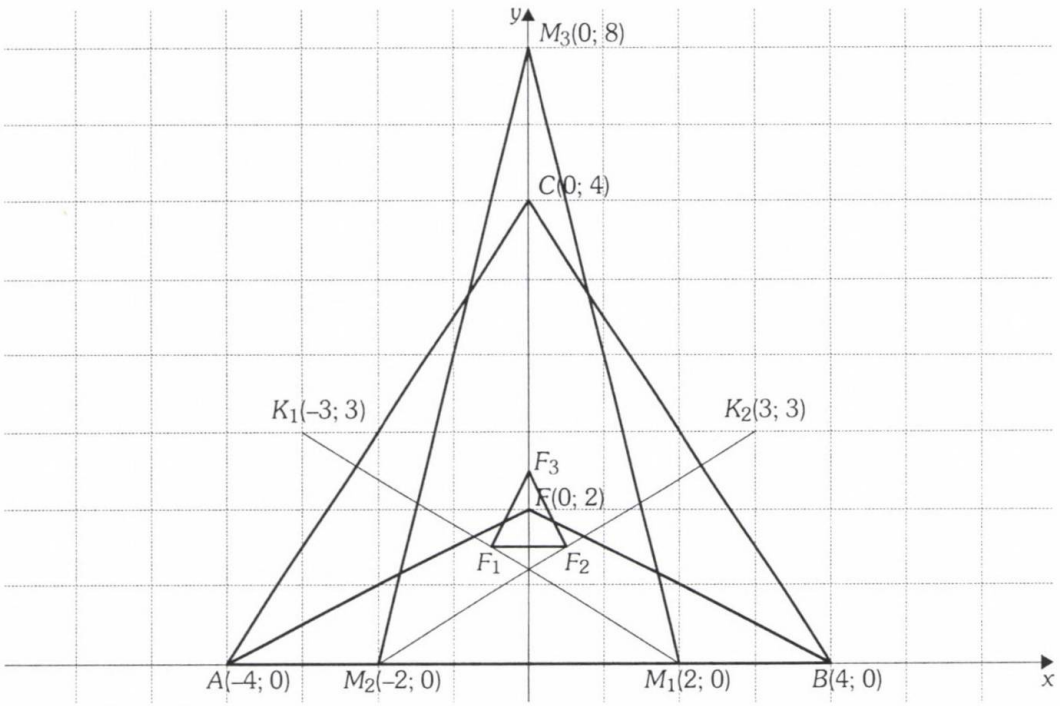
(4) és (6) esetek: Ezekre az esetekre egy ellenpélda *3. ábra ABC* háromszöge.

Az *ABS* háromszög derékszögű, így magasságpontja *S*, az *ACS*, illetve *BCS* háromszög magasságpontja rendre M_1, illetve M_2. Látható, hogy az M_1M_2S háromszög nem hasonló az *ABC* háromszöghöz, tehát a (4) esetben a válasz: nem igaz.

A *3. ábrán* az *ACS* háromszög körülírt körének középpontja $K_1(-4; 4)$, Feuerbach-köré-



3. ábra



4. ábra

nek középpontja $F_1(1; 2)$. A másik két háromszög Feuerbach-körének középpontja $F_2(-1; 2)$, $F_3(0; 1)$. Az $F_1F_2F_3$ háromszög egyenlő szárú derékszögű, így nem hasonló az ABC háromszöghöz, tehát az állítás a (6) esetben is hamis.

(7) és (9) esetek: E két eset vizsgálatához tekintsünk egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget a koordináta-rendszerben speciálisan elhelyezve (*4. ábra*).

E háromszög Feuerbach-körének középpontja $F(0; 2)$. Az ACF háromszög magasságpontja $M_1(2; 0)$, a BCF háromszögé $M_2(-2; 0)$, az ABF háromszögé pedig $M_3(0; 8)$. Világos, hogy az $M_1M_2M_3$ háromszög nem hasonló az ABC háromszöghöz, hiszen alapja kisebb, magassága nagyobb.

Az ACF háromszög körülírt körének középpontja $K_1(-3; 3)$, a BCF háromszögé $K_2(3; 3)$, az ABF háromszögé pedig $K_3(0; -3)$. E háromszögek Feuerbach-köreinek középpontja rendre $F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $F_2\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $F_3\left(0; \frac{5}{2}\right)$. Az $F_1F_2F_3$ egyenlő szárú háromszög alapja és alapjához tartozó magassága egységnyi, így nem hasonló az ABC háromszöghöz.

Ezzel minden egyes esetre beláttuk a táblázatban összefoglalt állításokat.

Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 8.

228. Egy $4k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) oldalú szabályos sokszöget egyrétűen és hézagmentesen kitöltöttünk paralelogrammákkal. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogrammák közül legalább k darab téglalap!

Megoldás: Előbb belátjuk, hogy lehetséges egyrétű és hézagmentes lefedés véges sok paralelogrammával.

Állítás: Minden olyan $2n$ oldalú sokszög, melyben a szemközti oldalak párhuzamosak és egyenlő hosszúak egyrétűen és hézagmentesen lefedhető véges sok paralelogrammával.

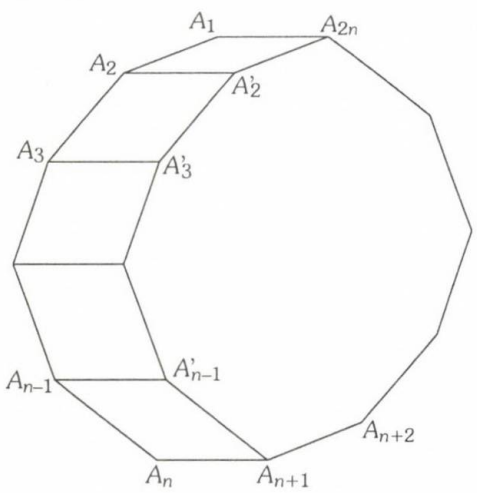
Bizonyítás: A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

$n = 2$ esetén az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy valamely $n \geq 2$ esetén minden $2(n-1)$ oldalú, fenti tulajdonságú sokszögre teljesül az állítás. Tekintsük a $2n$ oldalú $A_1A_2...A_{2n}$ megfelelő sokszöget (*5. ábra*).

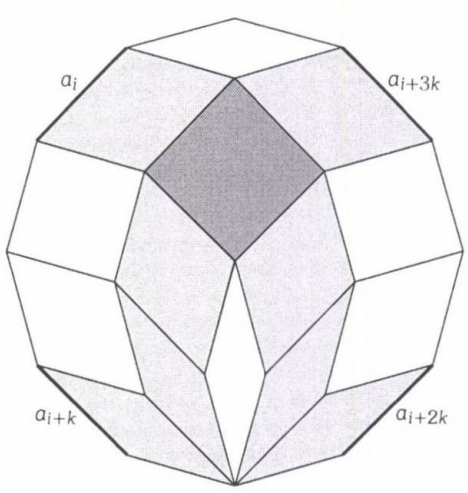
Az $A_1A_2...A_n$ törött vonalat az $\overrightarrow{A_1A_{2n}}$ ($=\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$) vektorral. Az így kapott $A'_2...A'_{n-1}A_{n+1}...A_{2n}$ $2(n-1)$ oldalú sokszög szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők, így az indukciós feltevés miatt lefedhető véges sok paralelogrammával. A fennmaradt rész megfelelő lefedését kapjuk, ha az $A_1A_2...A_{2n}$ törött vonal minden csúcsát összekötjük az eltolt képével.

Ezzel az állítást beláttuk.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy az eredeti feladat $4k$ oldalú szabályos sokszögét lefedtük véges sok paralelogrammával. Legyenek a sokszög oldalai egy adott körüljárási irányt tartva $a_1, a_2, ..., a_{4k}$. Az első k darab oldal közül válasszunk ki tetszőlegesen egy a_i oldalt. Mivel



5. ábra



6. ábra

a sokszög külső szögeinek nagysága $360°/4k$, ezért a_i párhuzamos a_{i+2k}-val, a_{i+k} párhuzamos a_{i+3k}-val és a_i merőleges a_{i+k}-ra. Egy adott lefedés esetén az a_i (a_{i+k}) oldalt és a vele párhuzamos a_{i+2k} (a_{i+3k}) oldalt egy egymáshoz élben csatlakozó paralelogrammákból álló lánc köt össze. E két paralelogramma lánc metszete az „a_i merőleges a_{i+k}-ra"-ra feltétel miatt egy olyan halmaz, amelyik tartalmaz legalább egy paralelogrammát (*6. ábra*).

Mivel az a_i oldal választására k lehetőségünk van, ezért az adott lefedésben legalább k darab téglalap található.

Rakonczai György, Budapest

Megjegyzések: 1. A feladat szövegében nem szerepelt, hogy véges sok paralelogrammával történjen a lefedés. Végtelen sok paralelogramma esetére nem igaz az állítás, ahogy az a *7. ábrán* látható.

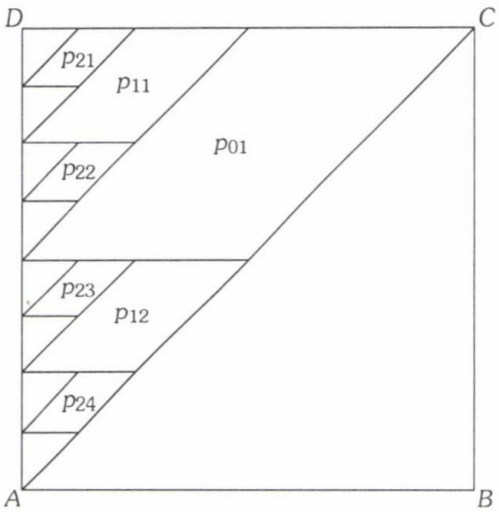
Az *ACD* háromszögben a lefedő paralelogrammák végtelen sokan vannak, és könnyen látható, hogy a lefedés hézagmentes és egyrétű. Az *ABC* háromszög az *ACD* háromszöggel azonos módon fedhető le megszámlálhatóan végtelen sok paralelogrammával.

Dályay Pál Péter, Szeged

2. A feladat a *Matematika Tanítása* 1985/1. számában kitűzött 1067. feladat általánosítása.

Csorba Ferenc, Győr
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A megoldók száma: 8.



7. ábra

229. f a valós számok halmazán értelmezett differenciálható függvény. Tudjuk, hogy bármely valós x esetén

$$f'(x) + af(x) = e^{-bx^2},$$

ahol a és b pozitív valós számok. Számítsuk ki a $\lim_{x\to\infty} f(x)$ határértéket!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Differenciálegyenletünket a következő alakban is írhatjuk:

$$\left(e^{ax}\cdot f(x)\right)' = e^{ax-bx^2}. \qquad (1)$$

(1) azt jelenti, hogy $f(x) = \dfrac{F(x)}{e^{ax}}$, ahol $F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ az $x \mapsto e^{ax-bx^2}$ folytonos függvény egy primitív függvénye. Látható, hogy az F és az $x \mapsto e^{ax}$ differenciálható függvényekre

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F'(x)}{(e^{ax})'} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{ax-bx^2}}{ae^{ax}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-bx^2}}{a} = 0,$$

valamint $\lim_{x\to\infty} e^{ax} = +\infty$, így a L'Hospital-szabály alapján (lásd pl. *Walter Rudin: A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978., 119. oldal, 5.13. tétel) következik, hogy $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Dályay Pál Péter, Szeged

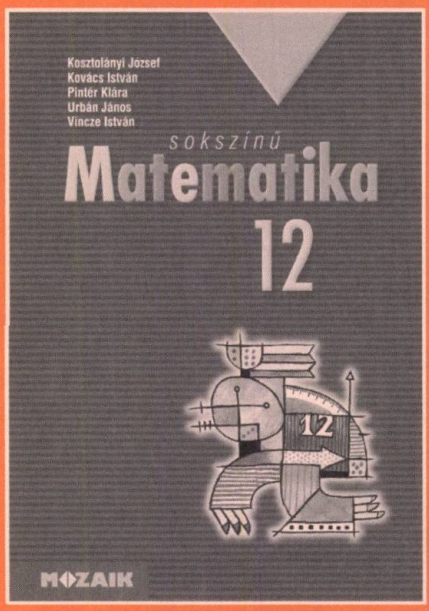
A megoldók száma: 9.

A megoldók névsora: Bukorné Both Emőke, Révkomárom (226., 227., 229.); Csorba Ferenc, Győr (225., 226., 228., 229.); Dályay Pál Péter, Szeged (225-229.); Fitos László, Esztergom (225., 226.); Kamarás Lajos, Pécs (225-229.); Kiss Zoltán, Pécs (225-229.); Rakonczai György, Budapest (225-229.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (225-229.); Varga Éva, Kecskemét (225., 226.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (225-229.); Zachar Zoltán, Tatabánya (225-229.).

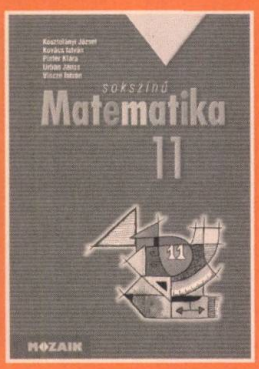
SOKSZÍNŰ MATEMATIKA TANKÖNYVCSALÁD

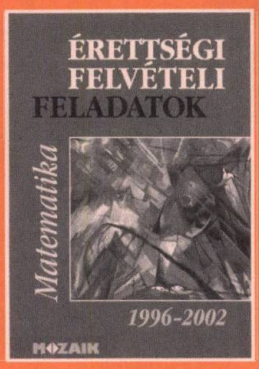
EGYEDÜLÁLLÓ SIKER A TANKÖNYVEK KÖZÖTT

Már négy rangos díjat is elnyert megjelenése óta a matematika tankönyvcsalád: a *Nemzetközi Könyvfesztivál* Budai-díját, a *Szép Magyar Könyv 2001 Verseny* díját és különdíját, valamint a HUNDIDAC 2003 Arany-díját. A sorozat 12. osztályos kötete a 2004/2005-ös tanévre kerül az iskolákba. A tankönyvek különlegessége a sokszínű és gazdag feladatanyag, és a matematikai ismereteket jól szemléltető színes ábrák és képek. A köteteket Ábrahám István szellemes, fantáziadús rajzai színesítik.



A MOZAIK KIADÓ KÖNYVAJÁNLATA MATEMATIKÁBÓL





MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu
MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

KÖNYVTÁR

Egy Catalan-féle egyenlőtlenségről

(Csete Lajos)

Érdekes összefüggések négyzetszámok között

(Fitos László)

Apollóniosz szümptómái

(Ringler András)

A Hajdú-Bihar Megyei Középiskolai Matematikai Versenyről

(Kántor Sándorné)

XII. ÉVFOLYAM 2004 2

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó:
Török Zoltán
Tördelőszerkesztő:
Kovács Attila
Borítóterv:
Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj:
1350 Ft
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltban:
Budapest VIII., Üllői út 70.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Egy Catalan-féle egyenlőtlenségről
Csete Lajos
tanár, Markotabödöge

Érdekes összefüggések négyzetszámok között
Fitos László
főiskolai docens, Esztergom

Apollóniosz szümptómái
Ringler András
egyetemi docens, Szeged

A Hajdú-Bihar Megyei Középiskolai Matematikai Versenyről
Kántor Sándorné
adjunktus, Debrecen

Könyvismertetés

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Csete Lajos

Egy Catalan-féle egyenlőtlenségről

A probléma és néhány előfordulása a szakirodalomban

Bizonyítsuk be, hogy minden a, b, c oldalhosszúságú háromszögre teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$a^2 \cdot b \cdot (a-b) + b^2 \cdot c \cdot (b-c) + \\ + c^2 \cdot a \cdot (c-a) \geq 0. \qquad (1)$$

Arthur Engel azt állítja kiváló [6] művében, hogy Murray S. Klamkin javaslatára tűzték ki a feladatot a diákolimpián, mégpedig 1983-ban. [10]

Murray S. Klamkin az Albertai Egyetem tanára és számos cikket írt az elemi matematika témakörében, ezenkívül írt egy idevágó könyvet a diákolimpiák feladatairól. Arthur Engel a német diákolimpiai csapat vezetője.

A Bottema-könyv [2] 14. oldalán olvashatjuk, hogy E. Catalan feladatát 1906-ban kitűzték az *Educational Times* N.S. 10 (1906) 57. folyóiratban.

Eugene Charles Catalan (1814-1894) matematikus volt, aki Franciaországban, a híres párizsi École Polytechnique (Műszaki Egyetem) intézetében tanult.

A Révai Gimnázium (Győr) könyvtárának egy félreeső szegletében bukkantam rá C.-A. Laisant egy régi, 1893-as könyvére. E könyvet 1898-ban szerezték be a Győri Állami Főreáliskola (jelenleg Révai Miklós Gimnázium) Tanári Könyvtára számára.

Charles-Ange Laisant (1841–1920) a tudományok doktora és szintén az École Polytechnique (Műszaki Egyetem) intézetében végzett. E könyvében megoldás nélkül szerepeltet problémákat, amelyeket néhány francia folyóiratban tűztek ki illetve oldottak meg.

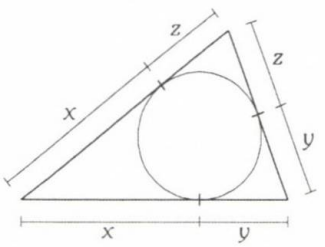
A Laisant-könyv [9] 18. oldalán olvashatjuk e problémát 36.-ként, bizonyítás nélkül. Ezenkívül azt olvashatjuk, hogy ezen problémát Catalan tűzte ki a *Mathesis* folyóiratban. Ez 1890 körül, inkább esetleg kicsit előbb történt, mert Laisant azt írja, hogy 1890-ben bizonyos Anderson a megoldását közölte a *Mathesis* folyóirat 213.oldalán.

A *Mathesist* 1881-ben alapították, és Laisant azt írja a vii oldalán, hogy a lap a *Nouvelle Correspondance mathematique* folyóirat tudományos tradícióit igyekezett folytatni. A *Nouvelle Correspondance* Catalan folyóirata volt és 6 teljes kötetet ért meg 1875-1880 között. A *Mathesis* irányítói Mansion és Neuberg urak voltak. (Paul Mansion (1844–1919) és Joseph Jean Baptiste Neuberg (1840–1926) belga matematikusok.)

A megoldók általában úgy szoktak elindulni ezen feladat megoldásakor, hogy a háromszög oldalaira egy ismert transzformációt alkalmaznak, amelyben a háromszögbe írt körhöz húzott érintőszakaszok szerepelnek. E módszer alkalmazásával foglalkozik például az [1], [3], részben a [4],[8],[12], [13] cikk.

1. változat

Legyen az $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$, ahol azt használtuk ki, hogy a körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok hossza egyenlő.



Ezt a transzformációt alkalmazzuk az (1) egyenlőtlenségre, s így kapjuk a (2) egyenlőtlenséget.

$$(x+y)^2 \cdot (y+z) \cdot (x-z) + \\ + (y+z)^2 \cdot (z+x) \cdot (y-x) + \\ + (z+x)^2 \cdot (x+y) \cdot (z-y) \geq 0 \qquad (2)$$

Ha itt elvégezzük a kijelölt műveleteket, akkor azt kapjuk, hogy

$$2x^3z + 2y^3x + 2z^3y - 2x^2yz - 2xy^2z - 2xyz^2 \geq 0$$

Ebből

$$x^3z + y^3x + z^3y - x^2yz - xy^2z - xyz^2 \geq 0 \qquad (3)$$

A következő változat a [3] cikkben szerepel, ezenkívül szerepel a [10]-ben, másrészt a [6]-ban, a 180.oldalon szereplő 17. feladat 188. oldalon levő első megoldását így gondolják el.

A (3) egyenlőtlenséget átalakíthatjuk a következő módon:

$$(x^3z - 2x^2yz + xy^2z) + (y^3x - 2xy^2z + xyz^2) + \\ + (z^3y - 2xyz^2 + x^2yz) \geq 0$$

Végezzük el a megfelelő kiemeléseket:

$$xz \cdot (x^2 - 2xy + y^2) + xy \cdot (y^2 - 2yz + z^2) + \\ + zy \cdot (z^2 - 2xz + x^2) \geq 0$$

Ebből

$$xz \cdot (x-y)^2 + xy \cdot (y-z)^2 + zy \cdot (z-x)^2 \geq 0 \qquad (4)$$

Ez pozitív x, y, z-re mindig teljesül. Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $x = y = z$, ebből pedig $a = b = c$ következik, tehát pontosan szabályos háromszög esetén áll fenn egyenlőség az eredeti egyenlőtlenségben. Ezzel igazoltuk a Catalan-féle egyenlőtlenséget.

2. változat

A következő változat a (3) egyenlőtlenségtől indul:

$$x^3z + y^3x + z^3y - x^2yz - xy^2z - xyz^2 \geq 0 \qquad (3)$$

Azaz

$$x^3z + y^3x + z^3y \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2 \qquad (5)$$

Ezt elosztva a pozitív xyz-vel kapjuk, hogy

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z \qquad (6)$$

Ezen egyenlőtlenség bizonyítása is többféle módon történhet.

Az egyik legegyszerűbb bizonyítási ötletet egy komáromi probléma megoldása során találtam 1997-ben. [5]

Adjuk a (6) egyenlőtlenség mindkét oldalához az $x + y + z$ összeget, de a következő elrendezésben:

$$\left(\frac{x^2}{y} + y\right) + \left(\frac{y^2}{z} + z\right) + \left(\frac{z^2}{x} + x\right) \geq \\ \geq 2x + 2y + 2z \qquad (7)$$

Most pedig alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a bal oldalon háromszor.

$$\frac{\frac{x^2}{y} + y}{2} \geq \sqrt{\frac{x^2}{y} \cdot y} = x \quad \text{vagyis} \quad \left(\frac{x^2}{y} + y\right) \geq 2x,$$

ugyanígy kapjuk, hogy $\left(\frac{y^2}{z} + z\right) \geq 2y$, $\left(\frac{z^2}{x} + x\right) \geq 2z$. Ezen utóbbi három egyenlőtlenséget összeadva, megkapjuk a (7) egyenlőtlenséget. Ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha mindhárom előbbi számtani közép megegyezik a megfelelő mértani középpel, ez pedig pontosan akkor van, ha $x = y = z$.

Ezzel igazoltuk az eredeti (1) egyenlőtlenséget, ahol egyenlőség az előbbieknek megfelelően akkor és csak akkor van, ha $a = b = c$.

3. változat

A harmadik változat az $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq$ $\geq x + y + z$ (6) egyenlőtlenségtől folytatja más úton. Használjuk a rendezési egyenlőtlenséget! Föltehetjük a szimmetria miatt az általánosság megszorítása nélkül, hogy $x \geq y \geq z$. Ekkor

$x^2 \geq y^2 \geq z^2$ és $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{z}$, tehát a rendezési egyenlőtlenség miatt:

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} = x^2 \cdot \frac{1}{y} + y^2 \cdot \frac{1}{z} + z^2 \cdot \frac{1}{x} \geq$$
$$\geq x^2 \cdot \frac{1}{x} + y^2 \cdot \frac{1}{y} + z^2 \cdot \frac{1}{z} = x + y + z$$

Ezzel igazoltuk (6)-ot és az előzőek szerint (1)-et is.

Lényegében így is megoldja a problémát [6] a 195-196.oldalon, mátrixokkal előadva.

A rendezési egyenlőtlenséget nálunk néhány könyv Szűcs Adolf-féle egyenlőtlenségnek nevezi. Ámde dr. Reiman István tanár úr [10] könyvében az 552. oldalon közli az érdeklődő olvasókkal, hogy: *„Megjegyezzük, hogy a fenti egyenlőtlenség jelentőségére Szűcs Adolf mutatott rá egy érdekes cikkében, ezért néha tévesen a fenti tételt Szűcs Adolf egyenlőtlenségnek nevezik, holott Szűcs Adolf már az említett cikkben erre mint ismert tételre hivatkozik."*

4. változat

Induljunk ki ismét az $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq$ $\geq x + y + z$ (6) egyenlőtlenségből!

Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-féle egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geq$$
$$\geq a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = \lambda \cdot b_1$, $a_2 = \lambda \cdot b_2$, $a_3 = \lambda \cdot b_3$.

Legyen itt $a_1 = \frac{x}{\sqrt{y}}$, $a_2 = \frac{y}{\sqrt{z}}$, $a_3 = \frac{z}{\sqrt{x}}$ és $b_1 = \sqrt{y}$, $b_2 = \sqrt{z}$, $b_3 = \sqrt{x}$.

Tehát fennáll, hogy

$$\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{z}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x}}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{z}\right)^2 + \left(\sqrt{x}\right)^2} \geq$$
$$\geq \frac{x}{\sqrt{y}} \cdot \sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}$$

Ebből

$$\sqrt{\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}} \cdot \sqrt{x + y + z} \geq x + y + z$$

Négyzetre emelve

$$\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}\right) \cdot (x + y + z) \geq (x + y + z)^2$$

Ebből kapjuk a bizonyítandó (6) egyenlőtlenséget:

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z$$

Itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha

$$\frac{x}{\sqrt{y}} = \lambda \cdot \sqrt{y}, \quad \frac{y}{\sqrt{z}} = \lambda \cdot \sqrt{z}, \quad \frac{z}{\sqrt{x}} = \lambda \cdot \sqrt{x}$$

Így

$$\frac{x}{y} = \lambda, \quad \frac{y}{z} = \lambda, \quad \frac{z}{x} = \lambda.$$

Összeszorozva az utóbbi három egyenlet megfelelő oldalait kapjuk, hogy $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = \lambda^3$, tehát $\lambda^3 = 1$, azaz $\lambda = 1$, ebből pedig következik, hogy $x = y = z$, ebből pedig következik, hogy pontosan $a = b = c$ esetén van egyenlőség az (1) egyenlőtlenségben, amelyet az előzőek szerint igazoltunk. E változat szerepel [10]-ben.

5. változat

Itt a [3] cikkben is vázolt változatot tárgyaljuk, amely szintén a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-féle egyenlőtlenségen alapszik. Lényegében ez szerepel a [6] könyv 180. oldala 17. feladatának 2. megoldásában a 188. oldalon.

Induljunk ki az

$$x^3z + y^3x + z^3y \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2 \qquad (5)$$

egyenlőtlenségből.

Vegyük észre, hogy

$$x^3z + y^3x + z^3y \geq xyz \cdot (x + y + z).$$

A 2. változatban osztottunk xyz-vel, most a változatosság kedvéért szorzunk $(x + y + z)$-vel.

Kapjuk, hogy

$$x^3z + y^3x + z^3y \cdot (x + y + z) \geq \geq xyz \cdot (x + y + z)^2. \quad (7)$$

Erre akarjuk alkalmazni a CBS-féle egyenlőtlenséget.

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geq \geq a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Legyen itt $a_1 = x \cdot \sqrt{xz}$, $a_2 = y \cdot \sqrt{yx}$, $a_3 = z \cdot \sqrt{zy}$ és $b_1 = \sqrt{y}$, $b_2 = \sqrt{z}$, $b_3 = \sqrt{x}$.

Így

$$\sqrt{\left(x \cdot \sqrt{xz}\right)^2 + \left(y \cdot \sqrt{yx}\right)^2 + \left(z \cdot \sqrt{yz}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{z}\right)^2 + \left(\sqrt{x}\right)^2} \geq \geq \left(x \cdot \sqrt{xz}\right) \cdot \sqrt{y} + \left(y \cdot \sqrt{yx}\right) \cdot \sqrt{z} + \left(z \cdot \sqrt{zy}\right) \cdot \sqrt{x}$$

Vagyis

$$\sqrt{x^3z + y^3x + z^3y} \cdot \sqrt{y + z + x} \geq \geq \sqrt{xyz} \cdot x + \sqrt{xyz} \cdot y + \sqrt{xyz} \cdot z$$

azaz

$$\sqrt{x^3z + y^3x + z^3y} \cdot \sqrt{x + y + z} \geq \geq \sqrt{xyz} \cdot (x + y + z)$$

ezt négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$(x^3z + y^3x + z^3y) \cdot (x + y + z) \geq xyz \cdot (x + y + z)^2$$

Ezzel igazoltuk (7)-et, s így (5)-öt is, amelyből következik az (1) egyenlőtlenség.

Egyenlőség akkor és csak akkor van (7)-ben, ha

$$x \cdot \sqrt{xz} = \lambda \cdot \sqrt{y}, \quad y \cdot \sqrt{yx} = \lambda \cdot \sqrt{z}, \quad z \cdot \sqrt{zy} = \lambda \cdot \sqrt{x}.$$

Összeszorozva az egyenlőségek megfelelő oldalait kapjuk, hogy

$$\left(x \cdot \sqrt{xz}\right) \cdot \left(y \cdot \sqrt{yx}\right) \cdot \left(z \cdot \sqrt{zy}\right) = = \left(\lambda \cdot \sqrt{y}\right) \cdot \left(\lambda \cdot \sqrt{z}\right) \cdot \left(\lambda \cdot \sqrt{x}\right)$$

vagyis $(xyz)^2 = \lambda^3 \cdot \sqrt{xyz}$, azaz $\lambda^3 = \left(\sqrt{xyz}\right)^3$, tehát $\lambda = \sqrt{xyz}$. Ebből $x = y = z$ adódik.

6. változat

Az előző két változatban osztással illetve szorzással kissé kedvezőbb alakra hoztuk a CBS-féle egyenlőtlenség szempontjából az (5) egyenlőtlenséget.

Most az (5) egyenlőtlenségből indulunk ki.

$$x^3z + y^3x + z^3y \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2 \quad (5)$$

Ha erre akarjuk alkalmazni a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-féle egyenlőtlenséget, akkor egy kicsit ravaszabbnak kell lennünk, mint az előzőekben.

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geq \geq a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Legyen most itt $a_1 = x \cdot \sqrt{xz}$, $a_2 = y \cdot \sqrt{yx}$, $a_3 = z \cdot \sqrt{zy}$ és $b_1 = y \cdot \sqrt{xz}$, $b_2 = z \cdot \sqrt{yx}$, $b_3 = x \cdot \sqrt{zy}$.

Ezeket behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\sqrt{\left(x \cdot \sqrt{xz}\right)^2 + \left(y \cdot \sqrt{yx}\right)^2 + \left(z \cdot \sqrt{yz}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(y \cdot \sqrt{xz}\right)^2 + \left(z \cdot \sqrt{yx}\right)^2 + \left(x \cdot \sqrt{yz}\right)^2} \geq \geq \left(x \cdot \sqrt{xz}\right) \cdot \left(y \cdot \sqrt{xz}\right) + \left(y \cdot \sqrt{yx}\right) \cdot \left(z \cdot \sqrt{yx}\right) + + \left(z \cdot \sqrt{yz} \cdot x \cdot \sqrt{yz}\right)$$

Ebből

$$\sqrt{x^3z + y^3x + z^3y} \cdot \sqrt{xy^2z + xyz^2 + x^2yz} \geq \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2,$$

négyzetre emelve és kissé rendezve

$$(x^3z + y^3x + z^3y) \cdot (x^2yz + xy^2z + xyz^2) \geq \geq (x^2yz + xy^2z + xyz^2)^2$$

így kapjuk, hogy

$$x^3z + y^3x + z^3y \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = \lambda \cdot b_1$, $a_2 = \lambda \cdot b_2$, $a_3 = \lambda \cdot b_3$.

Vagyis ha $x \cdot \sqrt{xz} = \lambda \cdot y \cdot \sqrt{xz}$, $y \cdot \sqrt{yx} = = \lambda \cdot z \cdot \sqrt{yx}$, $z \cdot \sqrt{zy} = \lambda \cdot x \cdot \sqrt{zy}$.

Ebből $x = \lambda \cdot y$, $y = \lambda \cdot z$, és $z = \lambda \cdot x$ következik. Összeszorozva az utóbbi három egyenlet megfelelő oldalait kapjuk, hogy $xyz = \lambda^3 \cdot xyz$, azaz $\lambda^3 = 1$, tehát $\lambda = 1$.

Azt kaptuk, hogy egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn az (5) egyenlőtlenségben, ha $x = y = z$. Mivel átalakításaink megfordíthatóak, ezért ezzel igazoltuk az (1) egyenlőtlenséget, amelyben az előzőek szerint akkor és csak akkor áll fenn egyenlőség, ha $a = b = c$.

7. változat

Ha már visszatértünk az $x^3z + y^3x + z^3y \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2$ (5) egyenlőtlenséghez, akkor megpróbáljuk most erre alkalmazni a rendezési egyenlőtlenséget.

Mivel az (5) egyenlőtlenség nem változik meg, ha az x, y, z-t ciklikusan felcseréljük benne, ezért az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy $x \geq y \geq z$.

Az (5) egyenlőtlenséget írjuk a következő alakba:

$$x^2 \cdot xz + y^2 \cdot yx + z^2 \cdot zy \geq$$
$$\geq x^2 \cdot zy + y^2 \cdot xz + z^2 \cdot yx$$

Ekkor $x^2 \geq y^2 \geq z^2$, másrészt $xz \geq zy$, $yx \geq zy$ és $yx \geq xz$. Tehát $yx \geq xz \geq zy$.

Alkalmazva a rendezési egyenlőtlenséget kapjuk, hogy:

$$x^2 \cdot xz + y^2 \cdot yx + z^2 \cdot zy \geq$$
$$\geq x^2 \cdot zy + y^2 \cdot xz + z^2 \cdot yx$$

tehát

$$x^3z + y^3x + z^3y \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2$$

Ezzel ismét igazoltuk (5)-öt és az előzőek szerint (1)-et is.

8. változat

Az eredeti $a^2 \cdot b \cdot (a - b) + b^2 \cdot c \cdot (b - c) + c^2 \cdot a \cdot (c - a) \geq 0$ egyenlőtlenségből indulunk ki. Legyen $f(a, b, c) = a^2 \cdot b \cdot (a - b) + b^2 \cdot c \cdot (b - c) + c^2 \cdot a \cdot (c - a)$ és t pozitív valós szám, tekintsük az $f(ta, tb, tc)$ polinomot!

$$f(ta, tb, tc) = (ta)^2 \cdot (tb) \cdot (ta - tb) +$$
$$+ (tb)^2 \cdot (tc) \cdot (tb - tc) + (tc)^2 \cdot (ta) \cdot (tc - ta) =$$
$$= t^4 \cdot (a^2 \cdot b \cdot (a - b) + b^2 \cdot c \cdot (b - c) +$$
$$+ c^2 \cdot a \cdot (c - a)) = t^4 f(a, b, c)$$

Azt kaptuk, hogy az f negyedfokú homogén polinom, ezért megpróbálkozhatunk a normálás módszerével. A t valós számot olyannak választjuk, hogy $ta = 1$ legyen és ekkor például $tb = 1 + x$ és $tc = 1 + y$.

Mivel az f polinom nem változik az a, b, c ciklikus felcserélésekor (ezért szoktuk mondani, hogy f szimmetrikus), ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a \leq b \leq c$, ebből következik, hogy $ta \leq tb \leq tc$, vagyis $1 \leq 1 + x \leq 1 + y$, azaz $0 \leq x \leq y$. (Ugyebár itt x illetve y mást jelent, mint az előző változatokban.)

Így

$$f(ta, tb, tc) = 1^2 \cdot (1 + x) \cdot (1 - (1 + x)) +$$
$$+ (1 + x)^2 \cdot (1 + y) \cdot (1 + x - (1 + y)) +$$
$$+ (1 + y)^2 \cdot 1 \cdot (1 + y - 1) = x^2 - xy + y^2 +$$
$$+ x^2y - 2xy^2 + x^3 + x^3y - x^2y^2 + y^3 \geq 0$$

Ez egy kissé ijesztő egyenlőtlenségnek tűnik. Átrendezve kapjuk, hogy a következőt kell igazolnunk:

$$x^2 + y^2 + x^2y + x^3 + x^3y + y^3 \geq xy + 2xy^2 + x^2y^2$$

Részekre fogjuk darabolni és egyenként bánunk el a részekkel.

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az x^2y és y^3 számokra!

$\frac{x^2y + y^3}{2} \geq \sqrt{x^2y \cdot y^3}$, ebből kapjuk, hogy $x^2y + y^3 \geq 2xy^2$.

Ezt felhasználva elég igazolnunk, hogy

$$x^2 + y^2 + x^3 + x^3y \geq xy + x^2y^2$$

De $y^2 \geq xy$, mert $y \geq x$, és ezt felhasználva kapjuk, hogy elég igazolnunk a következő egyenlőtlenséget:

$$x^2 + x^3 + x^3y \geq x^2y^2$$

Ebből

$$1 + x + xy \geq y^2$$

Mivel $ta = 1$, $tb = 1 + x$, $tc = 1 + y$ egy háromszög oldalai, ezért alkalmazhatjuk a háromszög-egyenlőtlenséget: $1 + (1 + x) \geq 1 + y$, ebből $1 + x \geq y$, ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$1 + x + xy \geq y + xy \geq y^2$$

tehát elég igazolni a következőt: $y + xy \geq y^2$, ebből $1 + x \geq y$, ez pedig az előzőek szerint teljesül a háromszög-egyenlőtlenség miatt.

Ezzel igazoltuk, hogy $f(ta, tb, tc) \geq 0$, de mivel $f(ta, tb, tc) = t^4 \cdot f(a, b, c)$ és t pozitív valós szám, ezért $f(ta, tb, tc) \geq 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f(a, b, c) \geq 0$.
Ezzel igazoltuk $f(a, b, c) \geq 0$ teljesülését, amely pedig azt jelenti, hogy valóban fennáll az (1) Catalan-féle egyenlőtlenség. [4]

Gondoljuk meg, hogy egyenlőség akkor és csak akkor lehet, ha $x = y$, ebből pedig az $a = b = c$ következik.

Az Engel-könyv [6] a 196. oldalon azt írja az (1) egyenlőtlenségről, hogy:

„The inequality is homogeneous in a, b, c of degree three." Az előbb kimutattuk, hogy az egyenlőtlenség valóban homogén, az előző mondással szemben viszont negyedfokú. De ez nem okoz bajt. Majd az említett könyv úgy folytatja, hogy javasolja a homogén egyenlőtlenség igazolását normálással. Legyen $a = 1$, $b = 1 - x$, $c = 1 - y$, ahol $0 < x$, $y < 1$ és $x + y < 1$. Majd különböztessük meg a következő két esetet: $x \leq y$, $y \leq x$. A könyv az olvasókra bízza ennek a gondolatmenetnek a kidolgozását. Remélem, hogy Olvasóink az előzőek nyomán sikerrel végigviszik ezt a tervet.

9. változat

Arthur Engel azt írja könyvében [6] a 196. oldalon, hogy Bernhard Leeb különdíjat kapott a diákolimpián a következő megoldásáért.

Az eredeti $a^2 \cdot b \cdot (a - b) + b^2 \cdot c \cdot (b - c) + c^2 \cdot a \cdot (c - a) \geq 0$ egyenlőtlenséget algebrai manipulációkkal a következő alakra hozta:

$$a \cdot (b - c)^2 \cdot (b + c - a) + b \cdot (a - b) \cdot (a - c) \cdot (a + b - c) \geq 0 \qquad \text{(L)}$$

Mivel az eredeti egyenlőtlenség szimmetrikus a, b, c-re, ezért az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$ (sőt elég feltenni, hogy a a legnagyobb oldal).

Ezen észrevételt figyelembe véve valóban teljesül az (L) egyenlőtlenség, hiszen $a - b \geq 0$, $a - c \geq 0$, másrészt $b + c - a > 0$ és $a + b - c > 0$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt teljesül.

Felmerülhet az a kérdés, hogy miféle átalakításokkal jutott el az (L) egyenlőtlenséghez a tanuló. Ez nem szerepel az említett könyvben. Az (L) egyenlőtlenség illetve ez a változat (az Engel-könyvben) megtalálható. [6]

E könyvben azt olvashatjuk erről a 369. oldalon, hogy mindkét oldal polinommá alakításával beláthatjuk, hogy

$$a^2 \cdot b \cdot (a - b) + b^2 \cdot c \cdot (b - c) + c^2 \cdot a \cdot (c - a) = a \cdot (b - c)^2 \cdot (b + c - a) + b \cdot (a - b) \cdot (a - c) \cdot (a + b - c)$$

Attól tartok, hogy Olvasóinkra vár annak kieszelése, vajon milyen módon vezette le Bernhard Leeb ezt az összefüggést. Érdekes lenne egy természetes utat találni, főleg, ha létezik.

Ezen természetes út sikertelen keresése közben találtam az (1) egyenlőtlenség következő bizonyítását. Így keletkezett a lépcső-transzformáció. [3]

10. változat

Ismét az $a^2 \cdot b \cdot (a - b) + b^2 \cdot c \cdot (b - c) + c^2 \cdot a \cdot (c - a) \geq 0$ (1) egyenlőtlenségből indulunk ki. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$, hiszen a bizonyítandó egyenlőtlenség szimmetrikus.

Bevezetjük az $x = a - b$ és az $y = b - c$ új változókat, amelyek előző jogos feltevésünk szerint nemnegatívak. (Ugyebár ezen új változók különböznek az előző változatokban használt x-ektől és y-októl.)

E feltevéssel és az új változókkal megtörtük az (1) egyenlőtlenség szimmetriáját.

Innen $a = x + b$ és $b = y + c$, azaz $a = x + y + c$. Ezeket behelyettesítjük az (1) egyenlőtlenségbe:

$$(x+y+c)^2 \cdot (y+c) \cdot x + (y+c)^2 \cdot c \cdot y + \\ + c^2 \cdot (x+y+c) \cdot (-x-y) \geq 0$$

Végezzük el a kijelölt műveleteket és kapjuk, hogy

$$xy^3 + 3xy^2c + xyc^2 + 2x^2y^2 + 4x^2yc + x^2c^2 + \\ + x^3y + x^3c + y^3c + y^2c^2 \geq 0$$

Ugye hihetetlen szerencsénk van, hiszen minden tag nemnegatív, ezért valóban fennáll az előző egyenlőtlenség.

S mivel átalakításaink megfordíthatóak, ezért az eredeti (1) egyenlőtlenség is teljesül. Mivel az előző egyenlőtlenség minden tagjában szerepel a szintén nemnegatív x vagy a nemnegatív y, ezért akkor és csak akkor áll fenn egyenlőség az egyenlőtlenségben, ha $x = 0$ és $y = 0$. Ezek pedig pontosan akkor teljesülnek, ha $a = b = c$, tehát az (1) egyenlőtlenségben akkor és csak akkor áll fenn egyenlőség, ha a háromszög egyenlő oldalú.

A témát 2001. november 18-án volt szerencsém előadni a felvidéki Komáromban a Nagy Károly Napok matematikai találkozóján. [5]

Irodalom

[1] Alekszejev, Roman – Lev Kurljandcsik, Sztoroni treugolnyika, *Kvant*, 1993/9-10. 69-70. old. (Az érintőszakasz transzformációról.)

[2] Bottema, O. – R. Ž. Djordjević – R. R. Janić – D. S. Mitrinović – P. M. Vasić: *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969. 14. oldal, 1.11 probléma (megoldás nélkül)

[3] Csete Lajos: A háromszög oldalainak egy transzformációjáról, *Iskolakultúra*, IV/24. (1994/24.), 62-65.old. (Az érintőszakasz transzformációról.)

[4] Csete Lajos: Egyenlőtlenségek bizonyítására szolgáló módszerek, *A Matematika Tanítása*, 2002/2. 10-19. old. (A lépcső-transzformációról, az érintőszakasz transzformációról, a homogén egyenlőtlenségek normálásáról.)

[5] Csete Lajos: A komáromi trükk és egy versenyfeladat, *A Matematika Tanítása*, 2003/4. 4-11. old.

[6] Engel, Arthur: *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997.

[7] Hajós György – Neukomm Gyula – Surányi János: *Matematikai versenytételek* II. rész, Harmadik, bővített kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988. 60-64.oldal (A rendezési egyenlőtlenségről.)

[8] Kós Géza: Egyenlőtlenségek egy háromszög oldalaival, *KöMaL*, 96/5. 266-268. oldal (Az érintőszakasz transzformációról.)

[9] Laisant, C.-A.: *Arithmétique. Algébre Élémentaire. Trigonométrie. (Recueil de problémes de mathématiques* I.), Gauthier-Villars, Paris, 1893.

[10] Reiman István: *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959-1994*, Typotex, Budapest, 1997. 1983/6. feladat

[11] Skljarszkij, D.O. – N.N. Csencov – I. M. Jaglom: *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből*, I. rész, *Aritmetika és algebra* (Harmadik kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.

[12] Tuzson Réka: Algebrai egyenlőtlenségek trigonometriai háttere II. rész, *Matlap*, 2002/6. 215-219.oldal (Az érintőszakasz transzformációról.), A cikk I. része: *Matlap*, 2002/5.

[13] Tuzson Zoltán: Trigonometrikus egyenlőtlenségek algebrai bizonyítása (I. rész), *A Matematika Tanítása*, 1997/1. 15-16. oldal (Az érintőszakasz transzformációról.)

[14] Tuzson Zoltán: A permutáció alkalmazása egyenlőtlenségek szerkesztésére és bizonyítására, *A Matematika Tanítása*, 1997/2. 18-20.oldal (A rendezési egyenlőtlenségről.)

Fitos László

Érdekes összefüggések négyzetszámok között

Sokféle összefüggés áll fenn négyzetszámok között. Gondoljunk csak a pitagoraszi számhármasok, számnégyesek, ... szám-n-esek, ... négyzetei között fennálló összefüggésekre. Továbbá utalhatok egy 1994-ben megjelent cikkemre, amelyben az $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 = a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2 + \ldots + a_n^2$ egyenlet pozitív egész megoldásaira vezettem le általános képleteket.* Most azonban közvetlenül egymás után következő négyzetszámokról lesz szó, illetve azokról a törvényszerű összefüggésekről, amelyek rájuk érvényesek.* [1], [2]

1. feladat. Van-e olyan öt közvetlenül egymás után következő négyzetszám, amelyek közül az első három összege egyenlő a többi kettő összegével?

Megoldás. Ha az első négyzetszámot x^2-tel jelöljük, akkor a következő egyenlet írható fel: $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2 + (x+4)^2$. Ebből adódik: $x^2 - 8x - 20 = 0$. Ennek pozitív gyöke 10, tehát a kapott összefüggés: $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$, ami valóban igaz.

A feladat általánosítása. Azt kell figyelembe venni, hogy az összefüggésben szereplő négyzetszámok száma tetszőleges páratlan szám, kivéve az 1-et, és a bal oldalon eggyel több tag van, mint a jobb oldalon. Ennek alapján válasszuk a négyzetszámok számát $2n+1$-nek, amiből $n+1$ négyzetszám van a bal oldalon és n a jobb oldalon. Tehát a felírható egyenlet:

$$x^2 + (x+1)^2 + \ldots + (x+n)^2 = \\ = (x+n+1)^2 + (x+n+2)^2 + \ldots + \\ + (x+n+n)^2,$$

ahol n tetszőleges pozitív egész szám. A négyzetreemelések, összevonások és a zérusra redukálás után az $x^2 - 2n^2x - (2n^3 + n^2) = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek pozitív egész gyöke: $x = 2n^2 + n = n(2n+1)$. Ez az összefüggés első négyzetszámának az alapja. A bal oldalon $n+1$ tag van, a jobb oldalon n tag. Tehát végtelen sok összefüggést kaptunk, amelyek közül az első hat a következő:

$3^2 + 4^2 = 5^2$,

$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$,

$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$,

$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = \\ = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$,

$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = \\ = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2$,

$78^2 + 79^2 + 80^2 + 81^2 + 82^2 + 83^2 + 84^2 = \\ = 85^2 + 86^2 + 87^2 + 88^2 + 89^2 + 90^2$, ...

2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy öt közvetlenül egymás után következő négyzetszám összege csak akkor lehet két szomszédos négyzetszám különbsége, ha a középső négyzetszám páratlan!

Bizonyítás. Jelöljük a középső négyzetszámot x^2-tel! Akkor a következő egyenletet kell megoldani:

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = \\ = n^2 - (n-1)^2 \quad (x > 2)$$

Azonos átalakításokkal kapjuk: $5x^2 + 10 = 2n - 1$, amiből $2n = 5x^2 + 11$, vagyis $5x^2 + 11$ páros szám, de ez csak akkor teljesül, ha x^2 páratlan.

Ezzel a bizonyítást befejeztük. Most még ellenőriznünk kell néhány konkrét esetben az egyenlőség helyességét. Ha $x = 5$, akkor $n = 68$ és $3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 68^2 - 67^2$, ami igaz, mert $135 = 135$.

Ha $x = 7$, akkor $n = 128$ és $5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 = 128^2 - 127^2$, vagyis $255 = 255$.

Végtelen sok ilyen tulajdonságú öt négyzetszám van, hiszen x helyébe végtelen sok páratlan számot helyettesíthetünk.

3. feladat. Hány megoldása van a pozitív egész számok halmazán az $(x+5)^2 - (x+4)^2 + (x+3)^2 - (x+2)^2 + (x+1)^2 - x^2 = y^2 - (y-1)^2$ egyenletnek, ha $10 < y < 1000$?

Megoldás. A négyzetreemelések és összevonások elvégzése után $6x + 15 = 2y - 1$, amiből $2y = 6x + 16$ és ebből $y = 3x + 8$.

Ha $x = 1$, akkor $y = 11$, és az egyenlőség: $6^2 - 5^2 + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 = 11^2 - 10^2$.

Ha $x = 2$, akkor $y = 14$, és az egyenlőség: $7^2 - 6^2 + 5^2 - 4^2 + 3^2 - 2^2 = 14^2 - 13^2$.

...

Tehát ha x helyébe 1-től kezdve sorban egymás után behelyettesítjük a pozitív egész számokat, akkor az így kapott y értékek egy $d = 3$ differenciájú számtani sorozatot alkotnak, melynek első tagja 11. Mivel pedig a feltétel szerint $10 < 3x + 8 < 1000$, *ezért* $0{,}66 < x < 330{,}66$. Tehát x 1-től 330-ig minden pozitív egész értéket felvehet, beleértve 1-et és 330-at is. Ennek alapján az adott feltételek mellett az egyenletnek 330 megoldása van.

Irodalom

[1] Fitos László: Pitagoraszi számnégyesek és szám-*n*-esek. A Matematika Tanítása, 1983. évi. 5. szám.

[2] Fitos László: A pitagoraszi számhármasok és szám-*n*-esek általánosításai. Iskolakultúra, IV. évfolyam, 5. szám. 1994.

* * *

Helyreigazítás

A Matematika Tanítása 2003. évi 2. számában jelent meg Ringler András „A $\sqrt{2}$" című cikke. Ebben a cikkben a 19. oldalon a 4. ábra aláírása hibás. Az ábra alatti szöveg helyesen a következő:

„A $\frac{17a}{6}x - x^2 = \frac{a^2}{144}$ alakú (elliptikus) egyenlet geometriai megoldását szemléltető vázlat (a $\frac{17a}{12}$ és az $\frac{a}{12}$ távolságok előre megszerkesztett távolságok). Figyelem, helykímélési okok miatt a 4. ábra nem méretarányos: a $\frac{17a}{12}$ távolságnak az $\frac{a}{12}$ távolságnál 17-szer kellene nagyobbnak lennie."

Olvasóink szíves elnézését kérjük!

Ringler András

Apollóniosz szümptómái

A matematikai gondolkodás fejlődésének bemutatása nagyon fontos és roppant érdekes feladat. Ennek ellenére kevés időt áldozunk erre az iskolai munka során, pedig a görögök matematikája mindenkit csodálatba ejt. Az irracionális számok felfedezése kapcsán a görög matematikában jelentkezett válság megoldására az irracionalitás gondolatát egyszerűen áttolták a geometriába: irracionális számok nincsenek, csupán irracionális mennyiségek, pl. szakaszok. Ilyen előzmények után érthető, hogy a görög geometria hatalmas fejlődésnek indult. Szinte minden matematikai problémát geometriai módszerekkel akartak megoldani. Éppen ezért nem kell csodálkozni azon, hogy a másodfokú egyenleteket is geometriailag, tehát körzővel és vonalzóval oldották meg ([1], [2], [3]).

A másodfokú egyenletek megoldásához az elliptikus-, a hiperbolikus- és a parabolikus illesztések gondolatát Euklidesz vetette fel, és használta másodfokú egyenletek megoldására. Az ellipszis, a hiperbola és a parabola fogalmának geometriába történő bevezetése azonban a pergai Apollóniosz (Kr.e. 262?–190?) nevéhez fűződik. Az ellipszis „egyenletének" apollónioszi levezetésével Filep László könyvében ([1]) találkoztam és mondhatom, roppant tanulságos volt a több mint 2000 éves levezetéssel való ismerkedés. A dolog megértése után kíváncsi lettem arra, hogy hasonló módon vajon hogyan lehetne levezetni a hiperbola és a parabola egyenletét is. Miután rájöttem erre, és a levezetéshez szükséges gondolatmenetet érdekesnek illetve tanulságosnak tartom, ezeket kellő előkészítés után közreadom. Dolgozatommal, a több mint 2000 éves ismeretek felidézésével a kúpszeletek specialistája, a „pergai óriás" gondolatai előtt kívánok tisztelegni. A kúpszeletek felismerése Menaikhmosz, a konhoisz görbe felfedezőjének a nevéhez fűződik; aki Kr.e. 300 körül – a kocka térfogatának kétszerezése kapcsán – az a oldalú négyzet területének kétszerezésére „felállított" $a : x = x : 2a$ aránnyal analógiában kísérelte meg az a oldalú kocka térfogatánál kétszer nagyobb térfogatú kocka oldalhosszának az előállítását ([4]). Arra gondolt, hogy az ezt biztosító x távolságot a hippokráteszi $a : x = x : y = y : 2a$ arányokból lehet meghatározni; mai szóhasználattal az $a : x = x : y$ összefüggésből az $y = \frac{x^2}{a}$ (parabola), az $a : x = y : 2a$ összefüggésből pedig az $y = \frac{2 \cdot a^2}{x}$ (hiperbola) kifejezésekhez jutva, ezek metszéspontjaként $x = \sqrt[3]{2} \cdot a$ adódik. Ez az x távolság éppen az a oldalú kocka térfogatánál kétszer nagyobb térfogatú kocka oldalának a hossza.

Az apollónioszi ötletek újragondolásához idézzük fel a derékszögű háromszögekre gyakran használt magasságtételt. A tétel szerint a derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasságnak a hossza mértani közepe az átfogó megfelelő két részének. Az 1. ábra jobb oldali részén látható rajz jelöléseivel: $OP^2 = DO \cdot OE$. Ezt az egyenlőséget a görögök így értelmezték: a DO és az OE szakaszokból készített téglalap ($DO \cdot OE$) területe megegyezik az OP oldalú négyzet (OP^2) területével. A „régi geométerek" ezzel a feltétellel definiálták a kör egyenletét, hiszen a kör minden P pontjának ki kell elégítenie az említett kifejezést, az Ő szóhasználatukkal a kör συμπτομα-ját. A magasságtételről könnyű megmutatni, hogy valójában a kör egyenletét „takarja". Ennek igazolására vezessük be a következő jelöléseket: $OP = y$, $DO = x$, $OE = 2 \cdot r - x$, ahol r a kör sugarát jelöli. Írjuk ezeket a magasságtétel fenti alakjába:

$$y^2 = x \cdot (2 \cdot r - x) \Rightarrow y^2 = 2 \cdot r \cdot x - x^2 =$$
$$= 2 \cdot r \cdot x - x^2 + r^2 - r^2 \Rightarrow (x - r)^2 + y^2 = r^2.$$

Ezzel egy r sugarú, $(r, 0)$ középpontú kör egyenletéhez jutottunk. A magasság-tételben megfogalmazottakat ezért nyugodtan nevezhetjük a kör συμπτομα-jának, modern szóval a kör egyenletének. Ezek után már könnyen juthatunk az ellipszis, a hiperbola, és a parabola συμπτομα-jához is: ehhez nézzük az 1. ábrát és olvassuk el a rá vonatkozó szöveget; ezután folytassuk a 2. ábrával és a hozzá tartozó magyarázó szöveggel; majd a 3. ábrával ugyanígy.

A vízszintes síkon álló ABC egyenes kúpot egy megfelelő ferde síkkal elmetszve a kúp palástja és a ferde metszősík közös része ellipszist „ad" (1. ábra). A rajz síkjára merőlegesen álló metszősík a kúpot (oldalnézetben) a GK vonal mentén metszi el. Metsszük el a kúpot valahol a K és a G pontok között egy vízszintes síkkal is. A kúpon keletkezett kör alakú metszésvonalat oldalnézetben a DE vonal jelzi, fölülnézetben pedig az ábra jobb oldala mutatja. Az egymást metsző ellipszis és e kör egyik közös pontját jelölje P. A kör átmérőjén lévő O pont a kör kerületi P pontja átmérőre vetítésével adódik; az OP távolság ezért a bejelölt DPE derékszögű háromszög átfogójának a magassága. Mivel a P pont rajta van a körön is és az ellipszisen is, ezért a P pontnak ki kell elégítenie a kör συμπτομα-ját, mai szóhasználattal a kör egyenletét. Ha a kúpot metsző vízszintes sík önmagával párhuzamosan a K és a G pontok között függőlegesen elmozdul, akkor a P pont mindig másik vízszintes helyzetű körre kerül, de közben „végigtapogatja" a rögzített helyzetű ellipszis pontjait, ezzel „kirajzolja" az ellipszis συμπτομα-ját. A vízszintes helyzetű metszősík G ponttól lefelé történő süllyedését pl. a GO távolság növekedésével jellemezhetjük. Ezt a távolságot mai szóhasználattal x koordinátának, az OP távolságot pedig y koordinátának nevezzük. Az ellipszis paramétereit nyilván a kúp adatai és a ferdén metsző sík kúphoz való viszonya határozzák meg.

Az 1. ábrán – oldalnézetben – látszik, hogy az $ODK\triangle$ hasonló az $FAK\triangle$-höz, és az $OEG\triangle$ hasonló az $FBG\triangle$-höz. A megfelelő oldalak arányának felírásával

$$\frac{DO}{KO}=\frac{FA}{FK} \quad \text{és} \quad \frac{OE}{OG}=\frac{FB}{FG}$$

adódik. Az ezekből kiszámolt

$$DO=KO\cdot\frac{FA}{FK} \quad \text{és} \quad OE=OG\cdot\frac{FB}{FG}$$

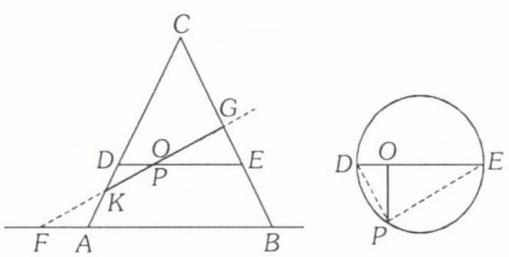
kifejezéseket beírva a kör $OP^2 = DO \cdot OE$ egyenletébe (συμπτομα-jába), adódik az

$$OP^2=KO\cdot OG\cdot\frac{FA\cdot FB}{FK\cdot FG}$$

kifejezés. Ebből az

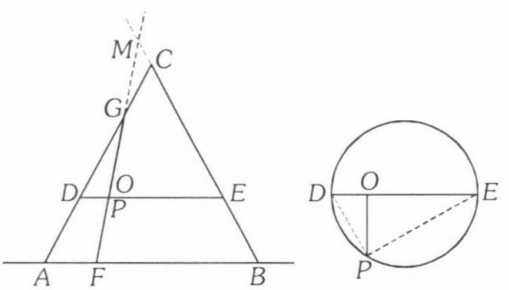
$$OP = y,\ OG = x,\ KG = a,\ KO = a - x,$$
$$\frac{FA\cdot FB}{FK\cdot FG}=\alpha,\ \alpha\cdot a = p$$

jelölések bevezetésével megkapjuk az ellipszis



1. ábra.

A vízszintes síkon álló egyenes kúp oldalnézetből – a rajz síkjában lévő metszeten – háromszögnek látszik. Az ABC pontokkal jellemzett kúpot (a rajz síkjára merőlegesen álló) alkalmasan elmetsző sík és a kúp palástja közös része ellipszist ad, amelyet – oldalnézetben – a GK „szakasz" szemléltet



2. ábra.

A vízszintes síkon álló egyenes kúp oldalnézetből – a rajz síkjában lévő metszeten – háromszögnek látszik. Az ABC pontokkal jellemzett kúpot (a rajz síkjára merőlegesen álló) alkalmasan elmetsző sík és a kúp palástja közös része hiperbolát ad, amelyet – oldalnézetben – a GF „szakasz" szemléltet

$$y^2 = (a - x) \cdot x \cdot \alpha =$$
$$= \alpha \cdot a \cdot x - \alpha \cdot x^2 = p \cdot x - \alpha \cdot x^2$$

alakú egyenletét. Az ellipszis szó a görögök mindent átható geometriai szemléletéből adódik. Ők a kapott egyenletet (συμπτομα-t) így értelmezték: a p hosszúságú szakaszhoz olyan x magasságú téglalapot kell illeszteni, amelynek $p \cdot x$ területéből $\alpha \cdot x^2$ területet elhagyva egy y oldalú négyzet (y^2) területét kapjuk. Ezt az $\alpha \cdot x^2$ területhiánnyal történő illesztést elliptikus illesztésnek, a szümptóma által kijelölt görbét pedig ellipszisnek nevezték el: **az elleipsis szó tehát a hiányra utal.**

A vízszintes síkon álló ABC egyenes kúpot egy megfelelő ferde síkkal elmetszve a kúp palástja és a ferde metszősík közös része hiperbolát „ad" (2. ábra). A rajz síkjára merőlegesen álló metszősík a kúpot (oldalnézetben) a GF vonal mentén metszi el. Metsszük el a kúpot valahol a G és az F pontok között egy vízszintes síkkal is. A kúpon keletkezett kör alakú metszésvonalat oldalnézetben a DE vonal jelzi, fölülnézetben pedig az ábra jobb oldala mutatja. Az egymást metsző hiperbola és e kör egyik közös pontját jelölje P. A kör átmérőjén lévő O pont a kör kerületi P pontja átmérőre vetítésével adódik; az OP távolság ezért a bejelölt DPE derékszögű háromszög átfogójának a magassága. Mivel a P pont rajta van a körön is és a hiperbolán is, ezért a P pontnak ki kell elégítenie a kör συμπτομα-ját, mai szóhasználattal a kör egyenletét. Ha a kúpot metsző vízszintes sík önmagával párhuzamosan a G és az F pontok között függőlegesen elmozdul, akkor a P pont mindig másik vízszintes helyzetű körre kerül, de közben „végigtapogatja" a rögzített helyzetű hiperbola pontjait, ezzel „kirajzolja" a hiperbola συμπτομα-ját. A vízszintes helyzetű metszősík G ponttól lefelé történő süllyedését pl. a GO távolság növekedésével jellemezhetjük. Ezt a távolságot mai szóhasználattal x koordinátának, az OP távolságot pedig y koordinátának nevezzük. A hiperbola paramétereit nyilván a kúp adatai és a ferdén metsző sík kúphoz való viszonya határozza meg.

A 2. ábrán – oldalnézetben – látszik, hogy a $DOG\triangle$ hasonló az $AFG\triangle$-höz, és az $OEM\triangle$ hasonló az $FBM\triangle$-höz. A megfelelő oldalak arányának felírásával

$$\frac{DO}{OG} = \frac{AF}{FG} \quad \text{és} \quad \frac{OE}{OM} = \frac{FB}{FM}$$

adódik. Az ezekből kiszámolt

$$DO = OG \cdot \frac{AF}{FG} \quad \text{és} \quad OE = OM \cdot \frac{FB}{FM}$$

kifejezéseket beírva a kör $OP^2 = DO \cdot OE$ egyenletébe (συμπτομα-jába), adódik az

$$OP^2 = OG \cdot OM \cdot \frac{AF \cdot FB}{FG \cdot FM}$$

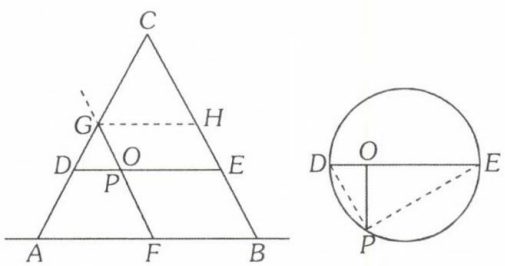
kifejezés. Ebből az

$$OP = y, \; OG = x, \; GM = a, \; OM = a + x,$$
$$\frac{AF \cdot FB}{FG \cdot FM} = \alpha, \quad \alpha \cdot a = p$$

jelölések bevezetésével megkapjuk a hiperbola

$$y^2 = x \cdot (a + x) \cdot \alpha =$$
$$= \alpha \cdot a \cdot x + \alpha \cdot x^2 = p \cdot x + \alpha \cdot x^2$$

alakú egyenletét. A hiperbola szó a görögök mindent átható geometriai szemléletéből adódik. Ők a kapott egyenletet (συμπτομα-t) így értelmezték: a p hosszúságú szakaszhoz olyan x magasságú téglalapot kell illeszteni, amelynek $p \cdot x$ területéhez $\alpha \cdot x^2$ területet adva egy y oldalú négyzet (y^2) területét kapjuk. Ezt az $\alpha \cdot x^2$ területtöbblettel történő illesztést hiperbolikus illesztésnek, a szümptóma által kijelölt görbét pedig hiperbolának nevezték el: **a hiperbole szó tehát a többletre utal.**



3. ábra.

A vízszintes síkon álló egyenes kúp oldalnézetből – a rajz síkjában lévő metszeten – háromszögnek látszik. Az ABC pontokkal jellemzett kúpot (a rajz síkjára merőlegesen álló) alkalmasan elmetsző sík és a kúp palástja közös része parabolát ad, amelyet – oldalnézetben – a GF „szakasz" szemléltet

A vízszintes síkon álló ABC egyenes kúpot egy megfelelő ferde síkkal elmetszve a kúp palástja és a ferde metszősík közös része parabolát „ad" (3. ábra). A rajz síkjára merőlegesen álló metszősík a kúpot (oldalnézetben) a GF vonal mentén metszi el (GF párhuzamos CB-vel). Metsszük el a kúpot valahol a G és az F pontok között egy vízszintes síkkal. A kúpon keletkezett kör alakú metszésvonalat oldalnézetben a DE vonal jelzi, fölülnézetben pedig az ábra jobb oldala mutatja. Az egymást metsző parabola és e kör egyik közös pontját jelölje P. A kör átmérőjén lévő O pont a kör kerületi P pontja átmérőre vetítésével adódik; az OP távolság ezért a bejelölt DPE derékszögű háromszög átfogójának a magassága. Mivel ez a P pont rajta van a körön is és a parabolán is, ezért a P pontnak ki kell elégítenie a kör συμπτομα-ját, mai szóhasználattal a kör egyenletét. Ha a kúpot metsző vízszintes sík önmagával párhuzamosan a G és az F pontok között függőlegesen elmozdul, akkor a P pont mindig másik vízszintes helyzetű körre kerül, de közben „végigtapogatja" a rögzített helyzetű parabola pontjait, ezzel „kirajzolja" a parabola συμπτομα-ját. A vízszintes helyzetű metszősík G ponttól lefelé történő süllyedését pl. a GO távolság növekedésével jellemezhetjük. Ezt a távolságot mai szóhasználattal x koordinátának, az OP távolságot pedig y koordinátának nevezzük. A parabola paramétereit nyilván a kúp adatai és a ferdén metsző sík kúphoz való viszonya határozza meg. A rajzon látható H segédpontot a DE szakasszal párhuzamosan rajzolt, a G ponton átmenő egyenes segítségével kapjuk meg; ezért a H pontra teljesül, hogy $GH = OE$.

A 3. ábrán – oldalnézetben – látszik, hogy a $DOG\triangle$ hasonló az $AFG\triangle$-höz, és a $GHC\triangle$ hasonló az $ABC\triangle$-höz. A megfelelő oldalak arányának felírásával

$$\frac{DO}{OG}=\frac{AF}{FG} \quad \text{és} \quad \frac{GH}{GC}=\frac{AB}{AC}$$

adódik. Az ezekből kiszámolt

$$DO=OG\cdot\frac{AF}{FG} \quad \text{és} \quad GH=GC\cdot\frac{AB}{AC}\equiv OE$$

kifejezéseket beírva a kör $OP^2 = DO \cdot OE$ egyenletébe (συμπτομα-jába), adódik az

$$OP^2=OG\cdot GC\cdot\frac{AF\cdot AB}{FG\cdot AC}$$

kifejezés. Ebből az

$$OP = y,\ OG = x,$$
$$GC\cdot\frac{AF\cdot AB}{FG\cdot AC}=p \quad \left(\equiv GC\cdot\frac{AB}{BC}\cdot\frac{AB}{AC}\right)$$

jelölések bevezetésével megkapjuk a parabola

$$y^2 = p \cdot x$$

alakú egyenletét. A parabola szó a görögök mindent átható geometriai szemléletéből adódik. Ők a kapott egyenletet (συμπτομα-t) így értelmezték: a p hosszúságú szakaszhoz olyan x magasságú téglalapot kell illeszteni, amelynek $p \cdot x$ területéhez nulla területet adva (illetve levonva) egy y oldalú négyzet (y^2) területét kapjuk. Ezt a sem terület-többlettel, sem terület-hiánnyal, vagyis megegyezésben (nulla területtel) történő illesztést parabolikus illesztésnek, a szümptóma által kijelölt görbét pedig parabolának nevezték el: a **parabole** szó tehát a megegyezésben, vagyis többlet és hiány nélküli egybevetésre utal.

Az 1000 évig virágzó görög matematika a hellenizmus korában érte el fénykorát. Ekkor alkotott Euklidesz, Menaikhmosz, Arisztarkhosz, Archimédesz, Eratosztenész és a kortársak által még Euklidesznél is nagyobb geométernek tartott Apollóniosz is. Annak ellenére, hogy a geometriai bizonyítások nagyon megnehezítették a matematika fejlődését, Apollóniosz bizonyításait még ma is a geometria gyöngyszemeinek tekintjük. Bár a kúpszeletek elméletével mások is foglalkoztak, az egységes tárgyalás a „pergai óriástól", a „μεγασ γεομετρια"-től származik.

Irodalom

[1] Filep László: A tudományok királynője, 1997, TYPOTEX Kft. – Budapest, Bessenyei Kiadó – Nyíregyháza, ISBN 963 7546 83 9.

[2] Ringler András: Másodfokú egyenletek geometriai megoldása, POLYGON, 2002, XI. kötet 2. szám, 60–65.

[3] Ringler András, Gondolkozzunk „görögül", 2003, A Matematika Tanítása, Mozaik Kiadó, XI. évfolyam, 5. szám, 3–8.

[4] Lévárdi László és Sain Márton: Matematikatörténeti feladatok, 1982, Tankönyvkiadó, Budapest.

Kántor Sándorné

A Hajdú-Bihar Megyei Középiskolai Matematikai Versenyről

A 2003-2004. tanévben 2003. november 12-én került megrendezésre a Hajdú-Bihar Megyei Középiskolai Matematikai Verseny a DE Matematikai Intézete és a BJMT Hajdú-Bihar megyei Tagozata közös szervezésében.

A verseny koordinátora Lajkó Károly, a versenybizottság vezetője Kántor Sándorné volt.

A versenyen 1300-nál több tanuló vett részt a város és a megye középiskoláiból, akik évfolyamonként versenyeztek három kategóriában. Az 5 feladatból álló feladatsor kidolgozására 3 óra állt a versenyzők rendelkezésére.

A versenybizottság sikeresnek értékelte a tanulók teljesítményét és 40 tanár 70 diákját részesítette helyezésben vagy dicséretben.

A feladatsorokat a Debreceni Egyetem Matematikai Intézetének oktatói állították össze:

9. évfolyam: Kovács András, 10. évfolyam: Kántor Sándor, 11. évfolyam: Bérczes Attila, 12. évfolyam: Kántor Sándorné.

Az idén a 10. és 11. évfolyam feladatsora bizonyult nehezebbnek.

A verseny eredményei

9. évfolyam

Gimnáziumok: II. díj: Koncz Tamás (DE Kossuth), Bíró Tamás (TÁG), Csatári Tamás (H.böszörmény Bocskai), III. díj: Perjéssy Lóránt (FMG), Kovács József (H.böszörmény, Bocskai).
Dicséret: Török Tamás (Pladány Karacs), Nagy Enikő (FMG), Török Márton (FMG), Szakács Balázs (H.szoboszló Hőgyes), Tolvaj Márton (Ref. Gimn.)
Speciális mat. tagozat (FMG): I. díj: Berna Zoltán, Lóska Ádám, Vincze János, II. díj: Horváth Gergely, Petrás Péter.
Dicséret: Boros Dániel, Molnár László, Tóthmérész Lilla.
Szakközépiskolák: II. díj: Ecsedi László (Péchy).
Dicséret: Fodor Ádám (Mechwart), Pálfi Norbert (Mechwart), Rudnák Dániel (Bethlen).

10.évfolyam

Gimnáziumok: I. díj: Kovács Péter (DE Kossuth), III. díj: Fegyver Zoltán (TÁG), Fábi Tamás (Dóczy), Dobos Péter (H.szoboszló Hőgyes).
Dicséret: Boros Péter (TÁG), Végh Sándor (DE Kossuth)
Speciális mat. tagozat (FMG): I. díj: Maleskovits Dávid, II. díj: Polozun Valéria, III. díj: Farkas Csaba.
Dicséret: Kertész Dávid, Trócsányi Miklós.
Szakközépiskolák: Dicséret: Bessenyei Csilla (Mechwart), Takács Róbert (Mechwart).

11.évfolyam

Gimnáziumok: II. díj: Varga Zoltán (H.szoboszló Hőgyes), III. díj: Sóvágó Sándor (H.böszörmény Bocskai), Víg Róbert (TÁG).
Dicséret: Szentjóbi Anna (H.szoboszló Hőgyes), Vas Gyula (Ref. Gimn).
Speciális mat. tagozat (FMG): III. díj: Tőkési Gergely.
Dicséret: Ruskó Péter, Krusper Márta.
Szakközépiskolák: Dicséret: Nagy Enikő (Bethlen), Kiss Gergely (Mechwart).

12. évfolyam

Gimnáziumok: I. díj: Egri Attila (H.szoboszló Hőgyes), Balogh Tamás (DE Kossuth), Sum Zsuzsanna (DE Kossuth), Vizi Balázs (TÁG), Vadon Györgyi (TÁG), Zajdó Szabolcs (TÁG), II. díj: Szilágyi Péter (DE Kossuth).

Dicséret: Bátyi Tamás (DE Kossuth), Csige Tamás (H.böszörmény Bocskai), Gál István (TÁG), Tornai Gábor (Ref. Gimn.)
Speciális mat. tagozat (FMG): I. díj: Biri Bernadett, Dányádi Zsolt.
Dicséret: Papp Gábor, Szabó Áron, Szőke Edina, Tuska Gábor.
Szakközépiskolák: I. díj: Ádám Anna (Bethlen), III. díj: Erőss Anna (Bethlen), Ary Tamás (Bethlen).
Dicséret: Bardócs Endre (Kereskedelmi és Vendéglátó SzkI), Zilahi Zoltán (H.szoboszló Közgazdasági SzkI), Kovács Dóra (Bethlen), Kovács Kitti (Bethlen), Sinkó János (Balásházy SzkI).
(A következő rövidítéseket használtuk: TÁG: Tóth Árpád Gimnázium, DE Kossuth: Debreceni Egyetem Kossuth Gimnázium, Dóczy: Dóczy Gedeon Református Gimnázium, H.szoboszló Hőgyes: Hajdúszoboszlói Hőgyes Endre Gimnázium, H.böszörmény Bocskai: Hajdúböszörményi Bocskai Gimnázium, FMG: Fazekas Gimnázium Debrecen, Ref. Gimn.: Református Gimnázium, Pladány Karacs: Püspökladány Karacs Ferenc Gimnázium, Mechwart: Mechwart András Gépipari Szakközépiskola, Péchy: Péchy Mihály Építőipari Szakközépiskola, Bethlen: Bethlen Gábor Kereskedelmi és Postaforgalmi Szakközépiskola)

A versenyen kitűzött feladatok

9. osztály

1. Egy 1 : 40 000 méretarányú turistatérképen két helység között 15,6 cm hosszúságú út vezet. Meg lehet-e ezt tenni 1 m/s állandó sebességű sétával 2 óra alatt?

8 pont

2. A debreceni villamosjegyeken az ábrán látható négyzethálózat 3 mezőjét lyukasztják ki. Hányféle módon állíthatók be a lyukasztók?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

10 pont

3. Bizonyítsuk be az alábbi állítást.
Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 8-cal, ha a szám utolsó 3 számjegyéből álló szám is osztható 8-cal.

12 pont

4. A tengerpart egy pontján az apály és a dagály között 4 m szintkülönbséget mérünk. Az itteni mólónál található vízmérce dagálykor 10 m-t mutat. Adjuk meg képlettel a tengerszint magasságának változását délelőtt 10 és délután 4 óra között, ha a legalacsonyabb vízmélységet a mérési idő 0 pontjánál pontosan 0 órakor mértük. (Az apály és a dagály $6\frac{1}{4}$ óránként váltják egymást, a víz emelkedését és süllyedését tekintsük egyenletesnek.)

14 pont

5. Két parasztasszony száz tojást hozott a piacra. Az egyik több tojással érkezett, mint a másik. A kettőjük bevétele azonos volt. Azt mondja az első a másodiknak: Ha én adtam volna el a tojásaidat, 15 garast kaptam volna. A második válasza: Ha én adtam volna el a tojásaidat, 63 garas lett volna a bevételem. Hány tojása volt az első és a második parasztasszonynak?
(Leonhard Euler, 18. században élt híres matematikus feladata.)

16 pont

10. osztály

1. Két pozitív egész szám szorzata 2100. Legalább mekkora az összegük?

10 pont

2. Az asztalon 21 papírdarab van. Egy lépésben a papírdarabok számát úgy növeljük, hogy közülük néhányat négy részre vágunk. Elérhető-e véges sok lépéssel az, hogy a papírdarabok száma 2003 legyen?

12 pont

3. Az $ABCD$ paralelogramma középpontja O, az OA szakasz O-hoz közelebbi harmadoló pontja H, az OB szakasz B-hez közelebbi negyedelő pontja N. Mennyi a paralelogramma területének és az OHN háromszög területének aránya?

12 pont

4. Hány éves az az ember, aki ma ünnepli születésnapját, és éveinek száma egyenlő

a születési évszámában levő számjegyek összegével?

12 pont

5. Az $ABCD$ négyszög területe T, oldalainak hossza rendre a, b, c, d. Bizonyítsuk be, hogy $4T \le (a+c)(b+d)$. Mikor áll fenn egyenlőség?

14 pont

11. osztály

1. Határozza meg 1999^{2003} utolsó három számjegyét!

8 pont

2. Egy 29 fős osztályban 8 tanulónak jeles, 7-nek jó, 5-nek közepes és 9-nek elégséges osztályzata van matematikából. Hányféleképpen lehet az osztályból kiválasztani 10 tanulót úgy, hogy legyen közöttük olyan tanuló, akinek jelese és olyan is, akinek közepese van matematikából?

10 pont

3. Bizonyítsa be, hogy ha a, b, c nemnegatív valós számok, akkor

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+ \\ +c^2(a+b-c) \le a^3+b^3+c^3,$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c$.

12 pont

4. Legyen adva egy $ABCD$ egyenlő szárú trapéz úgy, hogy CD alapjának 12, AB alapjának pedig $12\sqrt{3}$ a hossza. Számítsa ki a trapéz területét, ha tudjuk, hogy $DAC\sphericalangle = 30°$.

14 pont

5. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$x^5-4x^4+x^3+x^2-4x+1=0.$$

16 pont

12. osztály

1. Egy mértani sorozat három egymás után következő elemének összege 62, a középső elem 10. Melyik ez a három szám?

9 pont

2. A $2 \le x \le 8$ valós számokra értelmezzük az $f(x) = |x-2| + |x-4| - |2x-6|$ függvényt. Határozza meg f legkisebb és legnagyobb értékét! Adja meg mindkét esetben a szélsőérték helyét is!

10 pont

3. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti az e: $2x+y=-15$ és az f: $2x+y=5$ egyenletű egyeneseket, és átmegy a $P(2;1)$ ponton!

12 pont

4. Legyenek a, b és x olyan 1-től különböző pozitív valós számok, amelyekre teljesül, hogy

$$4\log_a^2 x + 3\log_b^2 x = 8\log_a x \cdot \log_b x .$$

Milyen kapcsolat van a és b között?

14 pont

5. Az ABC háromszögben $\alpha = 60°$, $\beta = 50°$. Az AB oldal felezőpontját jelöljük F-fel. A P pont a BC oldalnak az a pontja, amelyre az $AFPC$ négyszög és az FBP háromszög kerülete egyenlő. Mekkora az $FPC\sphericalangle$ nagysága?

15 pont

A feladatok megoldása és javítási útmutató

9. osztály

1. A 15,6 cm hossza a valóságban

$$15{,}6 \cdot 40\,000 = 624\,000 \text{ cm}.$$

2 pont

Ez 6,24 km.

1 pont

1 m/s = 3,6 km/h

1 pont

2 óra alatt $2 \cdot 3{,}6 = 7{,}2$ km-re lehet eljutni.

2 pont

$7{,}2 > 6{,}24$ miatt az utat 2 óra alatt meg lehet tenni.

2 pont

Összesen 8 pont

2. Az alábbi főbb esetek lehetségesek.

a) 3 lyuk egy sorban van. Ez 3-féleképpen valósulhat meg.

2 pont

b) 2 lyuk egy sorban van, a harmadik egy másikban. 2 lyuk például az első sorban 3 különböző módon helyezkedhet

el, míg a harmadik elhelyezkedésére 6 lehetőség van. Ez $3 \cdot 6 = 18$ különböző lyukasztásnak felel meg.

2 pont

Hasonlóan kapunk 18-18 lehetőséget, ha a második vagy harmadik sorban van 2 lyuk.

2 pont

c) Ha minden sorban 1 lyuk van, úgy ez minden sorban 3-3, összesen $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ különböző esetet ad.

2 pont

A különböző lyukasztások száma ezek összege

$$3 + 3 \cdot 18 + 27 = 84.$$

2 pont

Összesen 10 pont

3. Minden N természetes szám felírható

$$N = 1000A + B \quad (A, B \in \mathbb{N},\ 0 \le B \le 999)$$

alakban.

4 pont

$1000A$ osztható 8-cal (mert 1000 osztható 8-cal), így $1000A = 8x$ $(x \in \mathbb{N})$ alakú.

2 pont

Ha B osztható 8-cal, úgy $B = 8y$ $(y \in \mathbb{N})$ alakú. Ezért $N = 8x + 8y = 8(x + y)$ alakú, ahol $x + y \in \mathbb{N}$, tehát N osztható 8-cal.

3 pont

Ha N osztható 8-cal, akkor $N = 8z$ $(z \in \mathbb{N},\ z \ge x)$ alakú. Ezért $B = N - 1000A = 8z - 8x = 8(z - x)$ alakú, ahol $z - x \in \mathbb{N}$, tehát B osztható 8-cal. Ezzel beláttuk állításunkat.

3 pont

Összesen 12 pont

4. A magasság a megadott intervallumban 2 különböző képlettel adható meg.

1 pont

Vizsgáljuk az y vízszintet a t idő függvényében.

1 pont

Az y-ra felírható lineáris függvény 10 és 12,5 (óra) közötti t értékekre szigorúan monoton csökkenő,

1 pont

a 12,5 és 16 (óra) közötti t értékekre szigorúan monoton növekvő.

1 pont

A függvények meredeksége a víz emelkedésének, illetve süllyedésének mértékéből:

$$\frac{4}{6\frac{1}{4}}, \text{ illetve } -\frac{4}{6\frac{1}{4}}.$$

2 pont

A függvények 12,5 (óra) helyen felvett értéke 6 (m).

2 pont

A csökkenő függvény által felvett érték a 0 időpillanatban 14 (m), míg a növekvőé –2 (m). Így a függvények:

2 pont

$$y = 14 - \frac{4}{6\frac{1}{4}}t = 14 - \frac{16}{25}t, \text{ ha } 10 \le t \le 12{,}5,$$

2 pont

$$y = -2 + \frac{4}{6\frac{1}{4}}t = -2 + \frac{16}{25}t, \text{ ha } 12{,}5 \le t \le 16,$$

2 pont

Összesen 14 pont

5. A feladat szövegéből kiderül, hogy a második parasztasszonynak több tojása volt.

2 pont

Tegyük fel, hogy a második parasztasszony c-szer annyi tojással rendelkezett, mint az első. ($c > 1$ állandó.)

2 pont

Mivel egyforma összeget kaptak, ezért az első asszony c-szer annyi pénzért adta el a tojásait, mint a második.

2 pont

Ha a tojásaikat kicserélnék, akkor az elsőnek lenne c-szer több tojása, mint a másodiknak, és ezeket c-szer drágábban adná el.

2 pont

Emiatt a második az elsőnél c^2-szer több pénzt keresne.

2 pont

$$c^2 = 15 : 6\frac{2}{3} = 15 : \frac{20}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}$$

miatt $c = \frac{3}{2}$.

2 pont

Ha a 100 tojást 3 : 2 arányban elosztjuk, akkor kiderül, hogy a másodiknak 60, az elsőnek 40 tojása volt.

2 pont

Összesen 16 pont

Megjegyzés: A feladatot egyenlettel is meg lehet oldani. Ha például az első asszonynak x tojása volt, akkor a feladat alapján az $x^2 = 8000 - 160x$ egyenlethez juthatunk, amelynek a gyökei ($x_1 = 40$, $x_2 = -200$) grafikus módszerrel meghatározhatók.

10. osztály

1. Legyen a két szám x és y. Mivel $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$, az összeg akkor a legkisebb, ha $|x - y|$ a legkisebb.

6 pont

Könnyen belátható, hogy a keresett számok 50 és 42. Ugyanis ezek szorzata 2100, a közöttük levő számok nem tényezői 2100-nak, tehát egymáshoz ezeknél közelebb eső egész számok szorzata nem lehet 2100.

4 pont

Összesen 10 pont

Megjegyzés. Minden lehetőséget figyelembe vevő kipróbálás is teljes értékű megoldásnak számít.

2. Egy lépésnél n darabot négy részre vágva, a darabok száma $3n$-nel nő.

5 pont

Ha valamennyi lépésben elérhető a 2003 darabszám, akkor $2003 - 21 = 1982$-nek hárommal oszthatónak kellene lenni. Mivel ez nem osztható hárommal, ezért nem érhető el, hogy a darabok száma 2003 legyen.

7 pont

Összesen 12 pont

3. Legyen az $ABCD$ paralelogramma területe T. Ekkor az OAB háromszög területe $\frac{T}{4}$,

2 pont

az OHB háromszög területe $\frac{T}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{T}{12}$,

4 pont

az OHN háromszög területe ennek háromnegyede, tehát $\frac{T}{16}$.

3 pont

A keresett arány $\frac{1}{16}$.

3 pont

Összesen 12 pont

4. A feladatban szereplő ember 2000-ben, vagy utána nem születhetett, erről a négy évszám kipróbálásával meggyőződhetünk.

2 pont

Ezer előtt nem születhetett, mert olyan idős ember nincs. Tehát születésének évszáma $1000 + 100x + 10y + z$, ahol x, y, z számjegyek.

1 pont

A feladat szerint

$$1 + x + y + z = 2003 - (1000 + 100x + 10y + z),$$

azaz $101x + + 11y + 2z = 1002$.

2 pont

$y \leq 9$, $z \leq 9$ miatt $x = 9$, tehát

$$11y + 2z = 93.$$

2 pont

$z \leq 9$ miatt $y \geq 7$ lehet csak.

1 pont

$y = 9$ túl nagy lenne, $y = 8$ a paritás miatt nem lehet, így $y = 7$, és akkor $z = 8$.

2 pont

Azt kaptuk, hogy 1978-ban született, így 25 éves, és ez $1 + 9 + 7 + 8 = 25$ miatt valóban megoldás.

2 pont

Összesen 12 pont

5. Feltételezhetjük, hogy a négyszög konvex, mert konkáv négyszög esetében a négyszögön kívül haladó átló egyenesére tükrözve a négyszög alkalmasan választott két oldalát, a másik két oldallal együtt olyan négyszöget kapunk, amelyre a bizonyítást elvégezve az eredeti négyszögre is bizonyítva lesz az állítás.

2 pont

Legyen $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, az ABD, ill. BCD háromszögekben az a, ill. c oldalakhoz tartozó magasságok m_a, ill. m_c. Ekkor $2T = a \cdot m_a + c \cdot m_c$.

2 pont

Mivel $d \geq m_a$, és $b \geq m_c$, ezért $2T \leq ad + bc$.

3 pont

Másrészt egy háromszögben két oldal szorzata nem lehet kisebb a háromszög kétszeres területénél, így $ab + dc \geq 2T$.

3 pont

Összeadással kapjuk, hogy $4T \leq ad + bc + ab + dc = (a + c)(b + d)$, amit bizonyítani kellett.

2 pont

Egyenlőség nyilván akkor és csak akkor áll fenn, ha a négyszög téglalap (amibe a négyzet is beleértendő).

2 pont

Összesen 14 pont

11. osztály

1. $1999^{2003} = (2000 + (-1))^{2003}$.

2 pont

A binomiális tétel alapján $(2000 + (-1))^{2003} = k \cdot 2000 + (-1)^{2003}$, egy alkalmas k természetes számmal.

4 pont

Ezért 1999^{2003} utolsó három számjegye 999.

2 pont

Összesen 8 pont

2. Egy 29 fős osztályból 10 tanulót összesen $\binom{29}{10}$-féleképpen lehet kiválasztani. De ekkor megszámoltuk azokat az eseteket is, amikor nincs a kiválasztottak között jeles és közepes jeggyel rendelkező tanuló.

2 pont

Ezen belül azon esetek száma, amikor nincs köztük jeles jeggyel rendelkező tanuló $\binom{21}{10}$, míg azon esetek száma, amikor nincs köztük közepes jeggyel rendelkező tanuló $\binom{24}{10}$.

2 pont

Ezeket le kell vonni az összes lehetőségek számából. De így azon esetek számát kétszer is levonjuk, amikor se jeles, se közepes jeggyel rendelkező tanuló nincs a kiválasztottak között, ezért ezek számát még hozzá kell adni.

3 pont

Azon esetek száma, amikor nincs se jeles, se közepes jeggyel rendelkező tanuló a kiválasztottak között $\binom{16}{10}$.

Így a fentiek miatt 10 tanulót úgy kiválasztani az osztályból, hogy legyen közöttük olyan tanuló, akinek jelese és olyan is, akinek közepese van matematikából

$$\binom{29}{10} - \binom{21}{10} - \binom{24}{10} + \binom{16}{10} = 17724046$$

-féleképpen lehet.

Megjegyzés: A feladat megoldása akkor is teljes, ha a diák csak a képletet adja meg, a számszerű végeredményt nem.

3 pont

Összesen 10 pont

3. Az

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \le \le a^3 + b^3 + c^3$$

egyenlőtlenség helyett nyilván elegendő az

$$a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b \le \le 2a^3 + 2b^3 + 2c^3 \qquad (1)$$

egyenlőtlenséget belátni.

2 pont

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget alkalmazva az $a^3 \ge 0$, $a^3 \ge 0$ és $b^3 \ge 0$ számokra adódik, hogy

$$a^2b = \sqrt[3]{a^3a^3b^3} \le \frac{a^3 + a^3 + b^3}{3},$$

és egyenlőség pontosan $a = b$ esetén lesz. Hasonlóan becsülhető (1) bal oldalának minden tagja.

8 pont

Egyszerre felhasználva az így kapott hat egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b \le \le \frac{6a^3 + 6b^3 + 6c^3}{3} = 2a^3 + 2b^3 + 2c^3.$$

2 pont

Összesen 12 pont

4. Készítsünk ábrát a feladatban adott jelölésekkel. Rajzoljuk meg az $ABCD$ szimmetrikus trapéz köré írt kört, melynek középpontja legyen O. O-ból bocsássunk merőlegest az AB és CD alapokra, melyek talppontja legyen rendre M és N.

2 pont

Ekkor a $DAC\sphericalangle$ kerületi szög és a $DOC\sphericalangle$ középponti szög azonos körívén nyugszanak, ezért $DOC\sphericalangle = 60°$. Mivel ezen felül $d_{OC} = d_{OD}$, ezért OCD szabályos háromszög. Így a kör sugara $d_{OA} = d_{OB} = d_{OC} = d_{OD} = d_{CD} = 12$.

4 pont

Mivel a húrra merőleges sugár felezi a húrt, így $d_{AM} = d_{MB} = 6\sqrt{3}$ és $d_{CN} = d_{ND} = 6$. Ezután az *OND* és *OMA* derékszögű háromszögekben Pithagorasz tételét alkalmazva kapjuk, hogy $d_{ON} = 6\sqrt{3}$, illetve $d_{OM} = 6$.

4 pont

Most attól függően, hogy a trapéz köré írt kör középpontja a trapézon kívül, vagy belül van, a trapéz magassága vagy $d_{MN} = 6\left(\sqrt{3}-1\right)$, vagy $d_{MN} = 6\left(\sqrt{3}+1\right)$. Ezért a trapéz területe

$$T_{ABCD} = \frac{(d_{AB} + d_{CD})d_{MN}}{2} = 72,$$

illetve

$$T_{ABCD} = \frac{(d_{AB} + d_{CD})d_{MN}}{2} = 72\left(\sqrt{3}+2\right).$$

4 pont

Összesen 14 pont

5. A feladatban szereplő

$$x^5 - 4x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$$

egy reciprok egyenlet.

Csoportosítással, kiemeléssel szorzattá alakítunk:

$$x^5 - 4x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 1 =$$
$$= (x^5 + x^4) + (-5x^4 - 5x^3) + (6x^3 + 6x^2) +$$
$$+ (-5x^2 - 5x) + (x + 1) =$$
$$= (x+1)(x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1).$$

Így vagy $x + 1 = 0$, amiből az $x_1 = -1$ gyök adódik, vagy

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0. \qquad (2)$$

3 pont

Ennek az egyenletnek $x = 0$ nem gyöke, ezért eloszthatjuk az egyenletet x^2-tel:

$$x^2 - 5x + 6 - 5\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Vezessünk be egy új változót: $y := x + \frac{1}{x}$.

Mivel $y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, így $x^2 + \frac{1}{x^2} =$ $= y^2 - 2$ adódik, és az egyenletből kapjuk, hogy

$$y^2 - 5y + 4 = 0.$$

7 pont

Ebből $y_1 = 4$, $y_2 = 1$ gyököket kapjuk, és a (2) egyenlet gyökei vagy az

$$x + \frac{1}{x} = 4, \qquad (3)$$

vagy pedig az

$$x + \frac{1}{x} = 1 \qquad (4)$$

egyenlet gyökei.

4 pont

A (3) egyenletből $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ és $x_3 = 2 - \sqrt{3}$ adódik, (4)-nek pedig nincs valós gyöke.

Az egyenlet gyökei valóban -1; $2 + \sqrt{3}$; $2 - \sqrt{3}$.

2 pont

Összesen 16 pont

12. osztály

1. A feltételek miatt $a_1 = \frac{10}{q}$

1 pont

és $\frac{10}{q} + 10q = 52,$

1 pont

azaz $10q^2 - 52q + 10 = 0$.

1 pont

A gyökök: $q = 5$, illetve $q = \frac{1}{5}$.

1-1 pont

A hozzájuk tartozó a_1 értékek: $a_1 = 2$, illetve $a_1 = 50$.

1-1 pont

A keresett számok: 2, 10, 50, vagy 50, 10, 2.

1-1 pont

Összesen 9 pont

2. Esetszétválasztást végzünk.

1) Ha $2 \le x \le 3$, akkor $f(x) = -4 + 2x$.

2 pont

2) Ha $3 \le x \le 4$, akkor $f(x) = 8 - 2x$.

2 pont

3) Ha $4 \le x \le 8$, akkor $f(x) = 0$.

2 pont

Nyilvánvaló, hogy a függvény az 1) és a 2) esetben a végpontokban veszi fel a szélsőértékeit, a 3) esetben a függvény értéke minden pontban 0. $f(2) = 0, f(3) = 2, f(4) = 0$.

2 pont

Így $f(x)$ az $x = 3$ helyen veszi fel a maximumát, és a maximum értéke 2.

1 pont

A minimális értéke 0, amelyet az $x = 2$ pontban és a $4 \le x \le 8$ intervallumon vesz fel.

1 pont

Összesen 10 pont

3. Az e és az f egyenesek párhuzamosak, P illeszkedik f-re.

2 pont

Ezért a keresett kör egyik átmérője a PQ szakasz, ahol Q az e egyenesnek és a P-n átmenő, f-re merőleges g egyenesnek a metszéspontja.

3 pont

g egyenlete $x - 2y = 0$,

2 pont

$Q(-6; -3)$

2 pont

A PQ felezőpontja a keresett kör középpontja: $C(-2; -1)$.

1 pont

A kör sugarának négyzete: $d_{PC}^2 = r^2 = 20$.

1 pont

A kör egyenlete: $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 20$.

1 pont

Összesen 12 pont

4. Legyen $\log_a x = A$ és $\log_b x = B$, ahol az a, b, x számokra tett kikötések miatt $A \neq 0$, $B \neq 0$.

1 pont

Az adott összefüggés alakja: $4A^2 - 8AB + 3B^2 = 0$, vagy $4\left(\frac{A}{B}\right)^2 - 8\frac{A}{B} + 3 = 0$.

Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei:

1) $\frac{A}{B} = \frac{3}{2}$, 2) $\frac{A}{B} = \frac{1}{2}$.

5 pont

Az 1) esetben $2\log_a x = 3\log_b x = \frac{3\log_a x}{\log_a b}$, ezért $\log_a x(2\log_a b - 3) = 0$. Mivel $\log_a x \neq 0$, ezért $(2\log_a b - 3) = 0$, vagyis $a^3 = b^2$.

3 pont

A 2) esetben $2\log_a x = \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$, $\log_a x(2\log_a b - 1) = 0$. Mivel $\log_a x \neq 0$, ezért $(2\log_a b - 1) = 0$, vagyis $a = b^2$.

3 pont

Összefoglalva: $a^3 = b^2$ vagy $a = b^2$ a keresett összefüggés.

2 pont

Összesen 14 pont

5. A kerületre vonatkozó feltétel miatt $CA + AF + FP + PC = FB + BP + PF$, tehát $AC + PC = BP$.

2 pont

Legyen az AC szakasz C-n túli meghosszabbításán az N és a D pont olyan, hogy $CN = CP$ és $CD = CB$.

Így $AN = AC + PC = BP = ND$, tehát N az AD szakasz felezőpontja.

5 pont

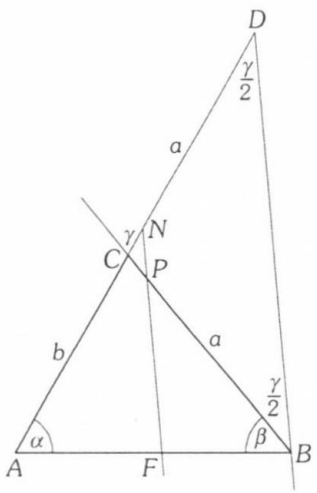
Mivel $CPN\triangle \sim CBD\triangle$ és $ABD\triangle \sim AFN\triangle$, ezért $PN \| DB \| NF$, tehát N, P, F egy egyenesen vannak.

5 pont

$ACB\sphericalangle = 70^\circ = 2 \cdot CPN\sphericalangle$ miatt $CPF\sphericalangle = 180^\circ - \frac{1}{2}ACB\sphericalangle = 145^\circ$.

3 pont

Összesen 15 pont



KÖNYVISMERTETÉS

Kántor Sándorné – Kántor Sándor: Nemzetközi magyar matematikai versenyek 1992-2003 (ISBN 1589-90-55, Studium, Debrecen, 2003)

Ez a könyv a Nemzetközi Magyar Matematika Versenyek anyagát dolgozza fel (1992-2003). A 2003-as kiadás az 1999. évi kiadás bővített, átdolgozott és kiegészített változata.
Komárom (1992), Vác (1993), Ungvár (1994), Paks (1995), Székelyudvarhely (1996), Kaposvár (1997), Szabadka (1998), Debrecen (1999) mellé helyszínként felsorakozott Dunaszerdahely (2000), Nagykanizsa (2001), Sepsiszentgyörgy (2002), Eger (2003) és reméljük, hogy az Oláh György komáromi és Bencze Mihály brassói tanárok által elindított, a Kárpát-medencében élő magyar anyanyelvű diákok együvé tartozását a matematika nyelvén kifejező verseny tovább él. Örömmel tapasztaltuk, hogy az egykor versenyző diákokat ma már a feladatkitűzők, illetve a kísérő tanárok között találjuk meg.

A Kárpát-medence magyar anyanyelvű középiskolás diákjai immár 12 éve mérik össze matematikai tudásukat a Nemzetközi Magyar Matematikai Versenyeken 4 kategóriában (9-12. évfolyamok). Minden évfolyam számára 6-6 feladatot tűz ki a zsűri, amelyeket az egyes régiók tanárai által beküldött javaslatokból választanak ki. Egy feladatsor megoldására 4 órát fordíthatnak a versenyzők.

A versenyek színvonalát minden évben neves előadók által tartott plenáris vagy szekciós előadások növelték. Nagy sikerű előadást tartott Cofman Judit erlangeni professzornő (Szabadka) és Kiss Elemér marosvásárhelyi professzor (Sepsiszentgyörgy) is.

A könyv részei:

1. A versenyek története
2. A versenyeken kitűzött feladatok (1992-2003)
3. A feladatok megoldásai (1992-2003)
4. A feladatok tematikus besorolása
5. A versenyek helyezettjei
6. Szekciós és plenáris előadások

A könyvet sikerrel forgathatják a különböző matematikai versenyekre vagy a felsőfokú tanulmányokra készülő diákok és felkészítő tanáraik. Feladatanyaga széles, választékos, sokszínű és hiányt pótló. Az egész munka egyben egy kordokumentum is.

Ajánljuk, hogy legyen ott minden iskola szakkönyvtárában, esélyt adva minden tanulónak a versennyel való megismerkedésre.

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2004. május 31.

Feladatok (245-249)

245. Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + px + q$ függvényről tudjuk, hogy $|f(0)| > 1$ és $f(1) \cdot f(-1) > 0$. Van-e f-nek zérushelye a $[-1; 1]$ intervallumban?

246. Oldjuk meg a nemnegatív egészek körében a következő egyenletet!

$$5^x \cdot 7^y + 4 = 3^z$$

247. Az ABC háromszög beírt köréhez húzzunk a háromszög oldalaival párhuzamos érintőket. Ezen érintők és a háromszög oldalainak metszéspontjai egy hatszög csúcsai. Mutassuk meg, hogy ennek a hatszögnek a kerülete nem lehet nagyobb, mint a háromszög kerületének 2/3-a!

248. Egy 32,5 cm sugarú kör egyik átmérőjének végpontjai A és B. A körvonal egymástól, valamint A-tól és B-től is különböző C és D pontjai olyanok, hogy az AC, AD, BC és BD szakaszok hossza cm-ben mérve egész szám. Mekkora lehet a C és D pontok legkisebb távolsága?

Kunovszki István, Mohács

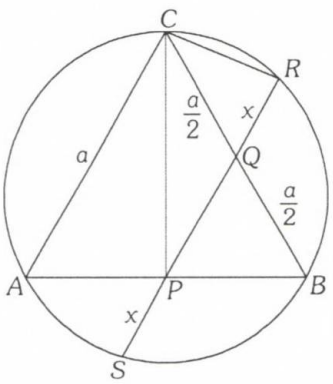
249. Van-e olyan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens végtelen sor, melyre a $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sgn} a_n \cdot a_n^2)$ sor divergens?

Dályay Pál Péter, Szeged

Feladatmegoldások (230-234. feladatok)

230. Az ABC szabályos háromszög AB és AC oldalának felezőpontja rendre P és Q. A háromszög köréírt körének a PQ egyenessel vett egyik metszéspontja R. Számítsuk ki a $\frac{PQ}{QR}$ hányadost!

Megoldás: Jelölje a szabályos háromszög oldalának hosszát a, és legyen a PQ egyenesnek a köréírt körrel vett másik metszéspontja S (*1. ábra*).



1. ábra

A szimmetria miatt $QR = PS = x$. A szelőszakaszok tétele alapján

$$x\left(x + \frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

ahonnan $x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}a$. A keresett arány:

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{a}{2x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 10.

231. Mutassuk meg, hogy bármely 3-nál nem kisebb páratlan egész szám esetén az

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)\cdot(n-1)!$$

szorzat osztható n-nel!

Megoldás: Tagonkénti beszorzás után a tekintett összeg

$$\frac{(n-1)!}{1}+\frac{(n-1)!}{2}+\ldots+\frac{(n-1)!}{n-1}.$$

n páratlan, így az összeg páros sok tagból áll, ami lehetővé teszi, hogy párosítsuk a tagokat. Legyen $\frac{(n-1)!}{k}$ párja $\frac{(n-1)!}{n-k}$ ($k = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$). Egy páron belül a tagok összege

$$\frac{(n-1)!}{k}+\frac{(n-1)!}{n-k}=n\cdot\frac{(n-1)!}{k(n-k)}.$$

Mivel ez a kifejezés minden egyes megengedett k érték esetén n-nel osztható egész szám, ezért a feladatbeli szorzat valóban osztható n-nel.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 10.

232. A pozitív tagokból álló $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatra bármely pozitív egész n esetén teljesül, hogy

$$a_{2n} + a_{2n+1} \geq a_n.$$

Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens!

I. megoldás: A feltételekből közvetlenül adódik, hogy bármely pozitív egész k esetén

$$\sum_{n=1}^{k}(a_{2n}+a_{2n+1}) \geq \sum_{n=1}^{k} a_n .$$

Ebből, a tagokat más sorrendben összegezve kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{k}(a_{2n}+a_{2n+1}) = \sum_{n=2}^{k} a_n + \sum_{n=k+1}^{2k+1} a_n \geq \sum_{n=1}^{k} a_n ,$$

ahonnan $\sum_{n=k+1}^{2k+1} a_n \geq a_1$.

Legyen $k = 2^i - 1$ (i pozitív egész). Ezzel az előző egyenlőtlenség:

$$\sum_{n=2^i}^{2^{i+1}-1} a_n \geq a_1 .$$

Világos, hogy $i = 0$ esetén is érvényes ez a becslés.

Legyen $l = 2^{j+1} - 1$. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{l} a_n = \lim_{j\to\infty}\sum_{i=0}^{j}\left(\sum_{n=2^i}^{2^{i+1}-1} a_n\right) \geq$$

$$\geq \lim_{j\to\infty}\sum_{i=0}^{j} a_1 = \lim_{j\to\infty}(j+1)\cdot a_1 .$$

Ez azt jelenti, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor valóban divergens.

Zachar Zoltán, Tatabánya

II. megoldás: Írjuk fel a feladatbeli $a_{2k} + a_{2k+1} \geq a_k$ egyenlőtlenséget minden $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetére, majd adjuk őket össze. Kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{2n+1} a_i - a_1 \geq \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy a végtelen sor konvergens, és összege A. A fenti egyenlőtlenség mindkét oldalának határértékét tekintve kapjuk, hogy $A - a_1 \geq A$. Ez viszont ellentmondás, hiszen a_1 pozitív szám. A kérdéses végtelen sor tehát divergens.

Rakonczai György, Budapest

A megoldók száma: 9.

233. Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot a következőképpen definiáljuk: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ és bármely 2-nél nem kisebb n esetén $a_{n+1} = 1 + a_1a_2\ldots a_{n-1} + (a_1a_2\ldots a_{n-1})^2$. Határozzuk meg a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$$

határértéket!

Megoldás: Tetszőleges pozitív egész n esetén jelölje p_n a sorozat első n tagjának szorzatát: $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, ..., $p_n = a_1a_2\ldots a_n$. Ha $n>1$, akkor rekurzív összefüggésünket a következő alakban is írhatjuk:

$$a_{n+1} = 1 + p_{n-1} + p_{n-1}^2. \qquad (1)$$

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy

$$a_{n+1} = 1 + p_n. \qquad (2)$$

Az állítás $n = 1$ esetén igaz. Ha az állítás igaz $n = k$ esetén, vagyis $a_{k+1} = 1 + p_k$, akkor (1) szerint

$$a_{k+2} = 1 + p_k + p_k^2 = 1 + p_k(1 + p_k) = \\ = 1 + p_k a_{k+1} = 1 + p_{k+1},$$

ami a teljes indukció elve alapján bizonyítja (2)-t. Legyen tetszőleges pozitív egész n esetén

$$s_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}.$$

Szintén teljes indukcióval igazoljuk, hogy

$$s_n = 2 - \frac{1}{p_n}. \qquad (3)$$

Ez $n=1$ esetén teljesül. Ha igaz $n=k$ esetén, akkor

$$s_{k+1} = s_k + \frac{1}{a_{k+1}} = 2 - \frac{1}{p_k} + \frac{1}{a_{k+1}} = \\ = 2 - \frac{a_{k+1} - p_k}{p_k a_{k+1}} = 2 - \frac{1}{p_{k+1}},$$

ahol figyelembe vettük (2)-t. (3)-at tehát igazoltuk.

Teljes indukcióval könnyen igazolható a $p_n \geq n$ egyenlőtlenség is. Ezt figyelembe véve (3) alapján kapjuk, hogy

$$2 - \frac{1}{n} \leq s_n < 2.$$

A rendőr-elv alapján $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 2$.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 9.

234. Legyen $S_n = \sum\limits_{k=1}^{2n-1} 2^{k-1} \cdot \binom{4n-2}{2k}$. Igazoljuk, hogy S_n bármely pozitív egész n esetén négyzetszám!

Megoldás: A binomiális tétel alapján

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{4n-2} = \sum_{k=0}^{4n-2} \left(\sqrt{2}\right)^k \binom{4n-2}{k} \quad \text{és}$$

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{4n-2} = \sum_{k=0}^{4n-2} (-1)^k \left(\sqrt{2}\right)^k \binom{4n-2}{k}.$$

A fenti két kifejezés összege:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{4n-2} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{4n-2} = \\ = 2\sum_{k=0}^{2n-1} \left(\sqrt{2}\right)^{2k} \binom{4n-2}{2k} = 2\sum_{k=0}^{2n-1} 2^k \binom{4n-2}{2k}.$$

A vizsgálandó összeg így

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n-1} 2^{k-1} \binom{4n-2}{2k} = \\ = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{4n-2} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{4n-2} - 2}{4} = \\ = \left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n-1}}{2} \right)^2.$$

A kapott tört számlálójában $\sqrt{2}$ páratlan kitevőjű hatványai kiesnek, páros kitevőjű hatványai pedig kétszer fordulnak elő, amiből adódóan a számláló páros egész szám, azaz S_n valóban négyzetszám.

Több megoldás alapján

Megjegyzés: Egy kombinatorikus modell a feladatbeli formulához kapcsolódva: Jelölje H_n azt, hogy n hosszúságú sorban hányféleképpen lehet házaspárokat leültetni úgy, hogy a házas felek egymás mellett (közelében) ülnek, de közöttük lehet üres hely. A házaspárokat nem különböztetjük meg, csak a nemek szerinti leülést tekintjük. Belátható, hogy

$$H_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} 2^k \binom{n}{2k}.$$

Belátható az is, hogy érvényes a következő rekurzív formula:

$$H_{n+1} = 2H_n + H_{n-1}.$$

Ezt a formulát kibontva

$$H_n = \frac{1}{2}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)$$

adódik. Mivel $H_{4n-2} = 2S_n + 1$, ezért H_{4n-2}-t kell vizsgálni.

Szoldatics József, Kapuvár

A megoldók száma: 8.

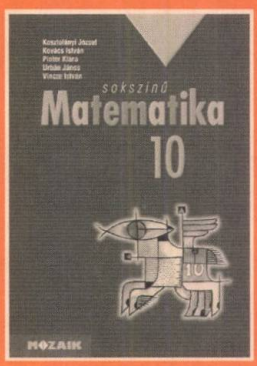
A megoldók névsora: Bukorné Both Emőke, Révkomárom (230-232.); Csorba Ferenc, Győr (230-232., 234.); Dályay Pál Péter, Szeged (230-234.); Kiss Zoltán, Pécs (230-234.); Nagy Béla, Sarkad (230-233.); Rakonczai György, Budapest (230-234.); Szoldatics József, Kapuvár (233., 234. 2 mód); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (230-234.); Udvari Tibor, Baja (230-234.); Varga Éva, Kecskemét (230., 231., 233.); Zachar Zoltán, Tatabánya (230. 2 mód, 231-234.).

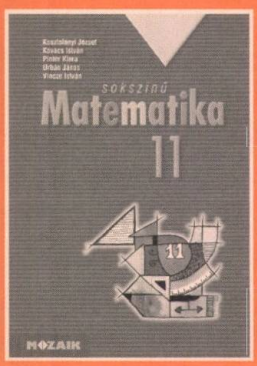
AJÁNLOTT TANTERV

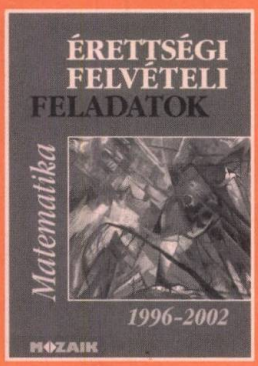
A közoktatásról szóló törvény szerint 2004-ben az iskolák új pedagógiai programot, illetve a NAT 2003 alapján helyi tantervet készítenek. Az iskola az oktatási miniszter által kihirdetett kerettantervek alapján is elkészítheti helyi tantervét. A Mozaik Kiadónak az OM által kiírt pályázatra benyújtott kerettanterv-rendszerét az Országos Köznevelési Tanács ajánlott tantervként kihirdetésre javasolta. A tanterv letölthető a kiadó honlapjáról a www.mozaik.info.hu címről, CD-n megrendelhető (6701 Szeged, Pf. 301. vagy rendeles@mozaik.info.hu), illetve megjelenik a kerettantervek kiadásáról szóló miniszteri rendelet mellékleteként, s hozzáférhető az OM honlapján is.

MOZAIK – NAT 2003
Kerettantervrendszer
www.mozaik.info.hu

MATEMATIKAKÖNYVEK A SIKERES FELVÉTELI VIZSGÁHOZ







MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu
MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

2

Egy speciális diofantikus egyenlet megoldásai a tanítás szemszögéből

(Bartha Gábor)

Bizonyos keresési idő csökkentése elemi úton

(Csete Lajos)

Beszámoló a 2004. évi Gordiusz Matematika Tesztversenyről

(Polcz Katalin – Poronyi Gábor)

Pályázati felhívás

XII. ÉVFOLYAM 2004 3

MOZAIK

www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó:
Török Zoltán
Tördelőszerkesztő:
Kovács Attila
Borítóterv:
Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj:
1350 Ft
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltban:
Budapest VIII., Üllői út 70.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Egy speciális diofantikus egyenlet megoldásai a tanítás szemszögéből
Bartha Gábor tanár, Szentendre

Bizonyos keresési idő csökkentése elemi úton
Csete Lajos tanár, Markotabödöge

A gyakorlás újfajta értelmezése a matematikadidaktikában és a matematikatanárok képzésében
Dr. Ambrus Gabriella adjunktus, Budapest

Beszámoló a XIII. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyről
Dr. Urbán János tanár, Budapest

Beszámoló a 2004. évi Gordiusz Matematika Tesztversenyről
Polcz Katalin tanár és Poronyi Gábor igazgató, Pécs

A XXXIII. Országos Kalmár László Verseny megyei fordulójának feladatai és megoldásai (5–8. osztály)

A tanárképző főiskolák 2004. évi Péter Rózsa Matematikaversenyének feladatai

ERICSSON-DÍJ 2004
Felhívás díjazandó tanárok ajánlására

PÁLYÁZATI FELHÍVÁS
Rátz Tanár Úr Életműdíj - 2004

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Bartha Gábor

Egy speciális diofantikus egyenlet megoldásai a tanítás szemszögéből

Már az általános iskola alsó tagozatán is feltehető az a kérdés (fel is teszik!), hogy melyik az a két szám, amelynek szorzata és összege is ugyanakkora?

Alsó tagozaton a tanulók nyilvánvalóan csak a pozitív egész számokra gondolnak, így rövid gondolkodás után a válaszuk: $2+2=2\cdot 2=4$, ami helyes is.

Amelyik gyerek a természetes számkörben is jártas már, némi noszogatás után a $0+0=0\cdot 0=0$ megoldást is felfedezi.

Kézenfekvő ezek után a következő kérdés: melyek az $x+y=x\cdot y$ egyenlet megoldásai az egész számok körében?

Egyenletünk rendezéssel $y(x-1)=x$ alakú, ahonnan $x\neq 1$ miatt $y=\frac{x}{x-1}$, azaz $y=1+\frac{1}{x-1}$, így $(x-1)(y-1)=1$. Ha $x\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{Z}$, akkor csak az

$x-1$	-1	1
$y-1$	-1	1

esetek lehetségesek, ahonnan az $x=0$, $y=0$, illetve az $x=2$, $y=2$ megoldások adódnak. Tehát az eredeti feladatnak nincs más megoldása az egész számok körében a tanulók által „kigondoltnál".

Gondoljunk most csak a pozitív egészekre, és vizsgáljuk meg xy és $x+y$ nagyságviszonyát! – Azt már láttuk, hogy a két mennyiség $x=y=2$ esetén egyenlő. Nyilvánvaló, hogy ha x és y egyikének értéke 1, akkor $x+y>xy$.

Ha viszont x és y is 2-nél nagyobb szám, akkor mindegyik tanuló némi próbálgatás után azonnal megsejti, hogy $xy>x+y$.

Vizsgáljuk most meg, hogy $x\in\mathbb{Z}^+$, $y\in\mathbb{Z}^+$ esetén az $xy=k(x+y)$ egyenletet mely $(x;y)$ számpárok elégítik ki, ha $k\in\mathbb{Z}^+$ (azaz $k=\frac{xy}{x+y}$, ami az előzőek szerint 1-nél nagyobb egész szám, ha x és y is 2-nél nagyobb).

Az egyenlet rendezéssel $y(x-k)=kx$ alakra hozható, amelyből látható, hogy $k<x$. Újabb átalakításokkal

$$y=\frac{kx}{x-k}=\frac{kx-k^2+k^2}{x-k}=k+\frac{k^2}{x-k},$$

ahonnan

$$(x-k)(y-k)=k^2 \qquad (*)$$

adódik.

Ekkor $k<x$ miatt $k<y$ is teljesül, ezért annyi megoldást kaphatunk ahányféleképpen k^2 felbontható két pozitív egész szám szorzatára, ez pedig k^2 pozitív osztóinak száma.

Az $xy=k(x+y)$ egyenlet megoldásai így $x=k+d_i$, $y=k+\frac{k^2}{d_i}$, ahol d_i a k^2 szám tetszőleges pozitív osztója.

A továbbiakban egy tetszőleges n pozitív egész szám osztóinak számát (pozitív osztókról van szó!) $d(n)$-nel jelölve az $xy=k(x+y)$ egyenlet megoldásainak száma a pozitív egészek halmazán $d(k^2)$.

Ha még azt is kikötjük, hogy a szimmetrikus megoldásokat nem tekintjük különbözőeknek, akkor például $x\leq y$ esetén a megoldások száma

$$\frac{d(k^2)+1}{2}.$$

Amennyiben adott k pozitív egész szám esetén az egész számok körében szeretnénk megoldani az $xy=k(x+y)$ egyenletet ($x\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{Z}$), akkor a megoldások száma (*) alapján $2\cdot d(k^2)$, hiszen a negatív egész osztók száma megegyezik a pozitív osztók számával.

Az eddig tárgyalt (előzmények) nélkül ezek után elég nehéz lenne a következő feladat:

Ha $x \in \mathbb{Z}$ és $y \in \mathbb{Z}$, valamint k adott pozitív egész szám, akkor bizonyítsuk be, hogy az $xy = k(x + y)$ egyenlet $(x; y)$ megoldásainak száma egyetlen k érték esetén sem lehet négyzetszám.

Megoldás: Mivel az adott egyenlettípus megoldásainak száma $2 \cdot d(k^2)$, ahol $d(k^2)$ páratlan szám, mert egy négyzetszám pozitív osztóinak száma páratlan szám (!), ezért $2 \cdot d(k^2) = 2(2n + 1)$ alakú $(n \in \mathbb{N})$.

De a $2(2n + 1) = 4n + 2$ alakról már leolvasható, hogy a $(4n + 2)$ páros szám nem lehet négyzetszám, hiszen 4-gyel osztva 2 maradékot ad.

Érdemes az eddigiekkel kapcsolatban megemlíteni még, hogy az $y = \frac{a}{x+b} + c$ egyenletű hiperbolák (a, b, c egész számok, $a \neq 0$) görbéjén csak véges számú olyan pont lehet, melynek mindkét koordinátája egész szám, az ilyen pontok száma pedig csak páros szám lehet. Az eredmény azért érdekes, mert a hiperbola görbéje végtelen (nem korlátos) alakzat.

Lépjünk most eggyel tovább:

Oldjuk meg az $xyz = x + y + z$ egyenletet a pozitív egész számok körében! Nevezhetjük alapmegoldásoknak az $x \leq y \leq z$ feltételrendszernek eleget tevő megoldásokat. Az összes megoldás ekkor az alapmegoldások permutációival állítható elő.

Nos, ha három megfelelő számot keresünk, akkor kisiskolás tanulóink is rá fognak jönni az egyetlen alapmegoldásra, mely a következő: $1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$. Annak bizonyítása, hogy ez az egyetlen alapmegoldás viszont már nem is olyan egyszerű. A megoldást, a bizonyítást elsősorban az általánosítás, illetve annak megoldási módszereinek megtalálása érdekében érdemes vázolni:

Mivel $1 \leq x \leq y \leq z$, ezért $x + y + z = xyz$ alapján $3 \geq \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{z}{z} = xy$, így $xy \leq 3$. A kapott egyenlőtlenségnek megfelelően x és y lehetséges értékei:

x	1	1	1
y	1	2	3

A szóba jöhető értékek közül csak az $x = 1$, $y = 2$ értékpár felel meg a feladat feltételeinek, ennek megfelelően az egyetlen alapmegoldás az $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ számhármas. (Az összes megoldás száma pedig 6.)

Ha már idáig eljutottunk, akkor érdemes megoldatni tanulóinkkal a pozitív egész számok halmazán az $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1x_2x_3x_4$, illetve az $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1x_2x_3x_4x_5$ egyenleteket.

(Az alapmegoldások a következők ($x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$): az első esetben $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 4$, míg a második esetben az (1; 1; 1; 2; 5), (1; 1; 1; 3; 3), (1; 1; 2; 2; 2) számötösök a megfelelők.)

Mint már említettük, az 1-nél nagyobb egész számok szorzatára teljesül, hogy az nem kisebb az összegüknél. Az észrevételt természetesen korrekt módon igazolni is kell (a tanítási órán vagy a szakkörön).

A bizonyítási igény felkeltésének lehetősége, illetve az iménti gondolat érvényre juttatása elvezethet a következő – relatíve nehéz – feladathoz (különösen az előzmények nélkül):

Néhány (de legalább kettő) prímszám szorzata a prímek összegének olyan prímszámszorosa, amely kisebb az összegben előforduló prímek legnagyobbikánál. A kérdés az, hogy melyek ezek a prímek és mekkora „n" értéke, azaz az összeg tagjainak száma?

Megoldás:

Ha $\boldsymbol{n = 2}$, akkor egyenletünk az $x_1 \leq x_2$ – az alapmegoldásoknak megfelelő – feltétel szerint csak $x_1x_2 = x_1(x_1 + x_2)$ lehet, ekkor pedig nincs megoldás.

Ha $n \geq 3$, akkor $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ esetén $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = p(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$, ahol p prímszám, $p < x_n$. Feltételek szerint p osztója a szorzatnak, továbbá $p \leq x_{n-1}$, így $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-2} \cdot x_n \leq$

$\le x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le nx_n$, ezért $2^{n-2}x_n \le nx_n$, vagyis $2^{n-2} \le n$. Az egyenlőtlenség csak $n \le 4$ esetén teljesül. (Bizonyítsunk a teljes indukció módszerével!)

Az $\boldsymbol{n = 3}$ esetben $x_1x_2x_3 = p(x_1 + x_2 + x_3)$. A p prímszám értéke most csak x_1 vagy x_2 lehet, hiszen x_1, x_2 és x_3 is prímszám.

Amennyiben $\boldsymbol{p = x_1}$, akkor $x_2x_3 = x_1 + x_2 + x_3 \le 3x_3$, így $x_2 \le 3$.

$x_2 = 2$ esetén x_1 értéke is 2, így az alapegyenlet szerint $4x_3 = 2(4 + x_3)$, ahonnan nem kapunk megoldást.

$x_2 = 3$ esetén $3x_1x_3 = x_1(x_1 + 3 + x_3)$, azaz $3x_3 = x_1 + 3 + x_3$, így $2x_3 = x_1 + 3$, ahol $x_1 + 3 \le x_3 + 3$, ezért $x_3 \le 3$, ami szintén nem vezet megoldáshoz.

Ha pedig $\boldsymbol{p = x_2}$, akkor $x_1x_3 = x_1 + x_2 + x_3 \le 3x_3$, ahonnan $x_1 \le 3$ adódik.

Az $x_1 = 2$ esetben $x_3 = x_2 + 2$. Az alapmegoldás ebben az esetben így $x_1 = 2$, x_2 és x_3 pedig ikerprímek; $x_3 = x_2 + 2$, ahol $p = x_2$. Minden ilyen számhármas megfelelő is, bár azt nem tudjuk, hogy az ikerprímek száma végtelen-e.

Az $x_1 = 3$ esetben $3x_3 = 3 + x_2 + x_3 \le 3 + 2x_3$, azaz $x_3 \le 3$, ami $x_1 = x_2 = x_3 = 3$-at eredményez; ez pedig nem megoldás.

Az $\boldsymbol{n = 4}$ esetben $x_1x_2x_3x_4 = p(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$, így $p \le x_3$ miatt $x_1x_2x_4 \le x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 4x_4$ alapján $x_1x_2 \le 4$. Ennek megfelelően pedig csak $x_1 = x_2 = 2$ lehetséges. Ha viszont $x_1 = x_2 = 2$, akkor $4x_3x_4 = p(4 + x_3 + x_4)$ alapján $p = 2$ vagy $p = x_3$ lehetséges.

A $\boldsymbol{p = 2}$ esetben $2x_3x_4 = 4 + x_3 + x_4$, ahonnan $x_4(2x_3 - 1) = x_3 + 4$, így az x_4-re kapható kifejezés rendezésével és szorzattá alakításával $(2x_3 - 1)(2x_4 - 1) = 9$ adódik. A szorzat alakjáról pedig már leolvasható, hogy nincs a feltételeknek megfelelő megoldás.

A $\boldsymbol{p = x_3}$ esetben az előzőhöz hasanlóan $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = p = 2$ adódik, ami szintén nem felel meg a feladat feltételeinek.

Tehát egyetlen esetben juthatunk alapmegoldáshoz, amikor is $n = 3$, $x_1 = 2$, $x_2 < x_3$, x_2 és x_3 ikerprímek, továbbá $p = x_2$.

Utólag persze (az eredmény birtokában) már úgy is feltehető a feladat kérdése – némi ravaszkodással – hogy az adott feltételek teljesülése esetén egyértelműen eldönthető-e, hogy az egyenletnek véges sok megoldása van-e?

(A válaszhoz természetesen ismerni kell a „nyitott számelméleti problémák" megoldásának jelenlegi állapotát.)

A feladatok megoldása után átgondolhatjuk, hogy az adott speciális diofantikus egyenletfajta mire is jó, mit fejleszthet, milyen eredményekkel kecsegtethet.

- Az egyenlettípus néhány változó esetén (de tetszőleges számú esetén is) könnyen érthető; azonnal formalizálható.
- Fejleszti az elemi számolási készségeket az egész számok halmazán végzett műveletek körében.
- Módszeres próbálgatásra, sőt rendszeres kipróbálásra (rendszeres gondolkodásra), bizonyos fokú rendszerszemléletre nevelhetők a feladattípus konkrét alkalmazásaival a tanulók.
- Gyakoroltathatjuk az oszthatósági szabályokat, alkalmazhatjuk és bizonyíthatjuk az oszthatóságra vonatkozó tételeket.
- Fejleszthetők a kombinációs és variációs gondolkodási készségek.
- Jobban érthetővé válhatnak az egzisztenciális problémák (van-e megoldás, más megoldás létezik-e, hány megoldás is van?).
- Talán a bizonyítási igény erősítése is megvalósítható a témakör jól megválasztott feladatsoraival.
- Erősíthetjük az általánosításra való hajlamot a paraméteres megoldásokon keresztül; törekedhetünk arra, hogy fokozatosan, egyre nagyobb „n" értékekre oldjuk meg az adott problémát.
- Előkészíthető a teljes indukció módszerének alkalmazása.
- Nem utolsósorban pedig egy-egy módszer, ötlet és fogás megtanítására alkalmas a témakör feldolgozása.

A felsorolás után okkal felvetődhet a következő kérdés: miért nem bevezetésként tisztáztuk az adott témakör feldolgozásának hasznosságát?

Válaszlehetőségek:

1. Csak! (Ami komolytalan válasz, bár a tanári gyakorlatban elég sűrűn előfordul.)
2. A tanár is úgy van – a legtöbb esetben a tananyaggal – hogy előbb el kell mélyednie benne, és csak utána tudja levonni a szükséges tanulságokat, valamint azt, hogy milyen célokat akar elérni a feldolgozással!
3. Egy jól „megfogható", gyakorlatilag mindenki által érthető anyag (a diofantikus egyenletek témaköre) – ami sajnos nem is tartozik a szűken vett törzsanyaghoz – alkalmasnak tűnik a tanulók matematikai gondolkodásának sokrétű fejlesztésére; ami szintén csak sok-sok tapasztalat leszűrésének következménye lehet.

Nem csodálható az előző kis eszmefuttatás alapján, hogy a tanítással, illetve annak módszertanával kapcsolatos gondolatokat inkább csak néhány bevezető feladat elemzése után fogalmazzuk meg, hiszen a célok, az elérhető eredmények, a „tanulságok" így konkrétumokhoz köthetők.

Feltételezhető, hogy bármilyen módszer szerinti tanítás során, különösen pedig egy-egy adott tankönyv vagy feladatgyűjtemény szerinti haladás alkalmával is csak utólag érzékelhető a „haszon"; minden bizonnyal később nyílik majd lehetőség a tanulói és tanári tapasztalatok megfelelő szintű összegzésére.

Éppen ezért – utólagosan – szeretném felhívni a figyelmet a diofantikus egyenletek témakörén belül az $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ egyenlettípusra.

Most akkor ugorjunk egy nagyot! Megoldjuk az $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8$ egyenletet, ahol $x_i \in \mathbb{Z}^+$. Az alapmegoldások esetén az eddigi gyakorlatunknak megfelelően legyen $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_8$! Végigosztva az egyenletet x_8-cal: $8 \ge x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ adódik, hiszen $\frac{x_i}{x_8} \le 1$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$.

Az egyenlőtlenség alapján $x_1 = 1$. Ekkor $8 \ge x_2x_3x_4x_5x_6x_7$, ahonnan $x_2 = 1$ következik. Így most $8 \ge x_3x_4x_5x_6x_7$, ezért x_3 értéke is csak 1 lehet.

Ha pedig $8 \ge x_4x_5x_6x_7$, akkor – az előzőekhez hasonlóan – $x_4 = 1$ adódik.

Tehát így már $8 \ge x_5x_6x_7$, ekkor pedig csak $x_5 \le 2$ lehetséges (hiszen $x_5 \ge 3$ esetén az adott egyenlőtlenség nem teljesül). Két eset lehetséges tehát:

I. $x_5 = 1$.

Ebben az esetben az egyenlet $x_6x_7x_8 = 5 + x_6 + x_7 + x_8$ alakú. Egyenletünk alapján $x_8 \ge 2$, így $x_6x_7 = \frac{5}{x_8} + \frac{x_6 + x_7 + x_8}{x_8} \le \frac{5}{2} + 3 = \frac{11}{2} = 5{,}5$.

Ha pedig $x_6x_7 \le 5{,}5$, akkor $x_6 \le 2$, így x_6 értéke 1 vagy 2 lehet.

a) Ha $x_6 = 1$, akkor $x_7x_8 = 6 + x_7 + x_8$. A szokásos módon történő rendezéssel pedig $(x_7 - 1)(x_8 - 1) = 7$ adódik. A 7 prímszám, ezért ebben az esetben az (1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 8) számnyolcas a megoldás.

b) Ha $x_6 = 2$, akkor $2x_7x_8 = 7 + x_7 + x_8$, ahonnan $2 \le x_8 = \frac{x_7 + 7}{2x_7 - 1}$ adódik. A $2 \le \frac{x_7 + 7}{2x_7 - 1}$ egyenlőtlenség alapján $x_7 \le 3$, így x_7 értéke 2 vagy 3 lehet. Az adott egyenlet alapján csak $x_7 = 2$ lehetséges, ekkor pedig az (1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 3) számnyolcas a megoldás.

II. $x_5 = 2$.

Ebben az esetben $2x_6x_7x_8 = 6 + x_6 + x_7 + x_8$. Most $2x_6x_7 = \frac{6}{x_8} + \frac{x_6 + x_7 + x_8}{x_8}$, ahol $x_8 \ge 2$, ezért $2x_6x_7 \le 3 + 3 = 6$, azaz $x_6x_7 \le 3$. Így viszont x_6 értéke csak 1 lehetne, ami ellentmond az $x_5 \le x_6$ feltételnek, tehát ebben az esetben nem jutunk alapmegoldáshoz.

Az összes megoldás száma a pozitív egészek körében I. alapján $\frac{8!}{6!}+\frac{8!}{5!\cdot 2!}=56+168=224$.

Nem érdektelen ezek után az általános feladat megoldásával foglalkozni.

Legyen tehát $x_i \in \mathbb{Z}^+$ $(i = 1, 2, ..., n)$, ahol $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ és $x_1 + x_2 + ... + x_n = x_1x_2...x_n$, ahol az x_i számok értéke a meghatározandó.

A teljes megoldás megadására ugyan nem érdemes vállalkozni, hiszen már $n = 8$ esetén is sok-sok esettel kellett foglalkozni, de a megoldáshoz vezető utat megmutatjuk, illetve egy speciális esetben a megoldást is megadjuk.

Vizsgálódásaink során feltehetjük, hogy $n \ge 3$ (az $n = 2$ esetre a megoldást már ismerjük, sőt $n = 3$-ra is).

A) Először azt látjuk be, hogy $x_{n-1} > 1$. Ha ugyanis $x_{n-1} = 1$ lenne, akkor az alapegyenlet $n - 1 + x_n = x_n$ alakú, ennek az egyenletnek pedig nincs megoldása.

B) Ha tehát az 1-esek száma f, akkor $f \le n - 2$. A már korábban bemutatott módszer szerint az egyenletet x_n-nel végigosztva

$$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1} = \frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_n} + ... + \frac{x_n}{x_n}$$

adódik. Mivel x_n a legnagyobb szám, ezért $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1} \le n$, így $x_1 = x_2 = ... = x_f = 1$ alapján $x_{f+1} \cdot x_{f+2} \cdot ... \cdot x_{n-1} \le n$. Feltevésünk szerint $2 \le x_{f+1} \le x_{f+2} \le ... \le x_{n-1}$, ezért $2^{n-1-f} \le n$.

Az egyenlőtlenség mindkét (pozitív) oldalának 2-es alapú logaritmusát véve: $n - 1 - f < \log_2 n$, azaz $n - 1 - \log_2 n \le f$.

Könnyen belátható (lássuk is be!), hogy egyenlőség soha nem teljesülhet $(n \ge 3)$, így $n - 1 - \log_2 n < f$, ahol még $f \ge 1$ is teljesül.

C) Az $x_{f+1} \cdot x_{f+2} \cdot ... \cdot x_{n-1} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_f}{x_n} + \frac{x_{f+1}}{x_n} + ... + \frac{x_n}{x_n}$ formula alapján $2 \le x_{f+1} \le x_{f+2} \le ... \le x_n$ szerint $2^{n-1-f} \le \frac{f}{2} + n - f = n - \frac{f}{2}$, így $n - 1 - f \le \log_2\left(n - \frac{f}{2}\right)$. A *B)* pont eredményét felhasználva: $n - 1 - f \le \log_2\left(n - \frac{f}{2}\right) < \log_2\left(n - \frac{1}{2}(n - 1 - \log_2 n)\right)$, azaz $n - 1 - f < \log_2(n + 1 + \log_2 n) - 1$. Tehát $n - \log_2(n + 1 + \log_2 n) < f$, ami jobb becslés az $n - 1 - \log_2 n < f$ egyenlőtlenség szerintinél.

Eredményeink alkalmazhatóságának szempontjából érdemes utólag végiggondolni, hogy mit is takar az $n - \log_2(n + 1 + \log_2 n) < f$ egyenlőtlenség!

„Elég nagy" k értékekre $\log_2 k$ a k értékhez képest relatív módon kicsi (például $\log_2 2004 < 11 < 2004$, ami szemléletesen azt jelenti, hogy f-nek is „elég nagynak" kell lennie, azaz „sok" 1-es számnak kell lennie az alapegyenlet megoldásainak megfelelő szám-n-esekben.

Az eddig elmondottak illusztrálásaként érdekes és érdemes megnézni a KÖMAL 2004. évi januári számának C. 745. feladatában megadható „f" értéket. A feladat röviden: $x_1x_2...x_{2004} = x_1 + x_2 + ... + x_{2004}$, ahol az x értékek pozitív egész számok.

Az adott esetben tehát $2004 - \log_2(2005 + \log_2 2004) < f \le 2002$, így $1993 < 2004 - \log_2(2005 + 11) = 2004 - \log_2 2016 < f \le 2002$, azaz $1994 \le f \le 2002$, ami 9 esetnek felel meg.

Végezetül megoldjuk az $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ egyenletet az $n = 100$ esetben a pozitív egész számok halmazán, ahol $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$; megmutatva, hogy eredményeink, illetve a bemutatott módszerek nemcsak a két kézen is végigszámolható n értékekre alkalmazhatók.

Ha $n = 100$, akkor $n - \log_2(n + 1 + \log_2 n) < f \le n - 2$ alapján $100 - \log_2 108 < f \le 98$, azaz $93 < f \le 98$. Az f szám lehetséges értékei így: 94, 95, 96, 97, 98.

(I.) $f = 94$ esetén $x_{95} \cdot x_{96} \cdot x_{97} \cdot x_{98} \cdot x_{99} \cdot x_{100} = 94 + x_{95} + x_{96} + x_{97} + x_{98} + x_{99} + x_{100}$, így a már korábban alkalmazott eljárás alapján $x_{95} \cdot x_{96} \cdot x_{97} \cdot x_{98} \cdot x_{99} \cdot x_{100} \le \frac{94}{x_{100}} + 6 \le$ $\le 47 + 6 = 53$. Ekkor csak $x_{95} = x_{96} = x_{97} = x_{98} = 2$ teljesülhet, különben a szorzat 53-nál nagyobb lenne. Így pedig az eredeti egyenlet $16x_{99}x_{100} = 102 + x_{99} + x_{100}$ alakú, ahonnan $32x_{100} \le 16x_{99}x_{100} = 102 + x_{99} + x_{100} \le 102 + 2x_{100}$ adódik. Tehát $30x_{100} \le 102$ szerint $x_{100} \le 3$. Az $x_{100} = 2$ érték nem megoldás, hasonlóan $x_{100} = 3$-hoz.

(II.) $f = 95$ esetén $x_{96} \cdot x_{97} \cdot x_{98} \cdot x_{99} \cdot x_{100} = 95 + x_{96} + x_{97} + x_{98} + x_{99} + x_{100}$. Az előző esetnek megfelelően most $x_{96} \cdot x_{97} \cdot x_{98} \cdot x_{99} \le 52$, ami csak $x_{96} = x_{97} = 2$ esetén teljesülhet. Ekkor $4x_{98}x_{99}x_{100} = 99 + x_{98} + x_{99} + x_{100}$, így $x_{100}(4x_{98}x_{99} - 1) = 99 + x_{98} + x_{99} \le 99 + 2x_{100}$, azaz $x_{100}(4x_{98}x_{99} - 3) \le 99$, ezért $x_{98} \le 3$. Ha $x_{98} = 2$, akkor $8x_{99}x_{100} = 101 + x_{99} + x_{100}$, ahonnan rendezéssel $(8x_{99} - 1)(8x_{100} - 1) = 809$ adódik. Ennek az egyenletnek pedig nincs megoldása, hiszen 809 prímszám.

Ha pedig $x_{98} = 3$, akkor $12x_{99}x_{100} = 102 + x_{99} + x_{100}$. A kapott egyenlet szorzat alakban: $(12x_{99} - 1)(12x_{100} - 1) = 1225$. Az egyenletnek egy megoldása van: $x_{99} = x_{100} = 3$. Tehát az eredeti egyenlet egyik megoldása: $x_1 = x_2 = \ldots = x_{95} = 1$, $x_{96} = x_{97} = 2$, $x_{98} = x_{99} = x_{100} = 3$.

(III.) $f = 96$ esetén $x_{97} \cdot x_{98} \cdot x_{99} \cdot x_{100} = 96 + x_{97} + x_{98} + x_{99} + x_{100}$, így $x_{97} \cdot x_{98} \cdot x_{99} \le 52$ alapján $x_{97} \le 3$. Az x_{97} szám lehetséges értékei így $x_{97} = 2$ vagy $x_{97} = 3$. Ha $x_{97} = 2$, akkor $2x_{98}x_{99}x_{100} = 98 + x_{98} + x_{99} + x_{100}$, így $x_{100}(2x_{98}x_{99} - 1) \le 98 + 2x_{100}$, azaz $x_{100}(2x_{98}x_{99} - 3) \le 98$. Az egyenlőtlenség alapján $x_{98} \le 3$.

Amennyiben $x_{98} = 2$, akkor $4x_{99}x_{100} = 100 + x_{99} + x_{100}$, rendezéssel pedig $(4x_{99} - 1) \cdot (4x_{100} - 1) = 401$. A 401 prímszám, ennek alapján pedig nincs megoldása az egyenletnek.

Az $x_{98} = 3$ esetben $6x_{99}x_{100} = 101 + x_{99} + x_{100}$, ami szorzattá alakított formában $(6x_{99} - 1) \cdot (6x_{100} - 1) = 607$ alakú. Mivel 607 prímszám, így most sincs megoldás.

Ha $x_{97} = 3$, akkor $3x_{98}x_{99}x_{100} = 99 + x_{98} + x_{99} + x_{100}$, így $x_{100}(3x_{98}x_{99} - 1) \le 99 + 2x_{100}$, azaz $x_{100}(3x_{98}x_{99} - 3) \le 99$, ahonnan $x_{98} \le 3$, ekkor pedig csak $x_{98} = 3$ lehetséges. Az egyenlet ebben az esetben $9x_{99}x_{100} = 102 + x_{99} + x_{100}$, szorzattá alakított formában pedig $(9x_{99} - 1) \cdot (9x_{100} - 1) = 919$. A 919 szám prímszám, így látható, hogy most sem kapunk megoldást.

(IV.) $f = 97$ esetén $x_{98}x_{99}x_{100} = 97 + x_{98} + x_{99} + x_{100}$, azaz $x_{100}(x_{98}x_{99} - 1) = 97 + x_{98} + x_{99} \le 97 + 2x_{100}$, így $x_{100}(x_{98}x_{99} - 3) \le 97$, ahonnan $x_{98} \le 4$ következik.

Ha $x_{98} = 2, 3, 4$, akkor rendre $(2x_{99} - 1) \cdot (2x_{100} - 1) = 199$, $(3x_{99} - 1) \cdot (3x_{100} - 1) = 301$, $(4x_{99} - 1) \cdot (4x_{100} - 1) = 405$ adódik. Egyik esetben sincs megoldás, mert 199 prímszám, $301 = 7 \cdot 43$ és $405 = 5 \cdot 41$.

(V.) Az utolsó, $f = 98$ esetben $x_{99}x_{100} = 98 + x_{99} + x_{100}$, azaz $x_{100}(x_{99} - 1) = x_{99} + 98$, ahonnan $(x_{99} - 1)(x_{100} - 1) = 99$ adódik. A lehetséges felbontások ennek megfelelően:

$x_{99} - 1$	1	3	9
$x_{100} - 1$	99	33	11

,

így pedig $f = 98$ esetén a megoldások: $x_{99} = 2$, $x_{100} = 100$, illetve $x_{99} = 4$, $x_{100} = 34$ és $x_{99} = 10$, $x_{100} = 12$.

Az eredeti $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{100} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{100}$ egyenlet alapmegoldásai így a következők:

$x_1 = x_2 = \ldots = x_{95} = 1$, $x_{96} = x_{97} = 2$, $x_{98} = x_{99} = x_{100} = 3$;

$x_1 = x_2 = \ldots = x_{98} = 1$, $x_{99} = 2$, $x_{100} = 100$;

$x_1 = x_2 = \ldots = x_{98} = 1$, $x_{99} = 4$, $x_{100} = 34$;

$x_1 = x_2 = \ldots = x_{98} = 1$, $x_{99} = 10$, $x_{100} = 12$.

Utoljára megmutatjuk még, hogy az $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ egyenletnek $(n > 2)$ mindig van megoldása. Egy megfelelő szám-n-es minden esetben az $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-2} = 1$, $x_{n-1} = 2$, $x_n = n$ számokból álló megoldás.

Csete Lajos

Bizonyos keresési idő csökkentése elemi úton

Donald E. Knuth egyik könyvében [1] olvashatjuk, hogy a számítógép-programozásban felmerül a következő összeg minimalizálásának problémája

$$S := \frac{L_1}{B_1} + \frac{L_2}{B_2} + \ldots + \frac{L_P}{B_P} + \frac{L_{P+1}}{B_{P+1}}$$

a $B_1 + B_2 + \ldots + B_P + B_{P+1} = M$ feltétel mellett. Itt az L-ek és a B-k pozitív valós számok míg P pozitív egész szám.

A számítógép-programozás iránt érdeklődőknek megemlítjük, hogy $L_1, L_2, \ldots, L_P$ hosszúságú rendezett fájlokat akarunk összefésülni $L_{P+1} = L_1 + L_2 + \ldots + L_P$ hosszúságú rendezett fájllá, és feltesszük, hogy a k-adik fájlhoz B_k méretű puffert használunk. Ekkor $B_1 + B_2 + \ldots + B_P + B_{P+1} = M$, ahol M a rendelkezésre álló belső memória. A keresések száma közelítőleg

$$S := \frac{L_1}{B_1} + \frac{L_2}{B_2} + \ldots + \frac{L_P}{B_P} + \frac{L_{P+1}}{B_{P+1}}.$$

Knuth szerint először David E. Ferguson mutatott rá 1971-ben (mások mellett), hogy a keresési idő csökkenthető, ha nem tesszük az összes puffert egyforma méretűvé. Knuth [1] könyvében egy elemi úton keresi meg a minimumot, míg a lábjegyzetben Simonovits Miklós főszerkesztő megemlíti, hogy az ilyen problémák megoldásában a (nem elemi) Lagrange-féle multiplikátoros eljárás a rutinmódszer. Mi nem törődünk tovább a probléma programozásbeli felvetésével, az idézett könyvben alaposan utánanézhetünk, hogy mi a fájl, a puffer és hogyan keresünk. A továbbiakban elemi matematikai problémaként fogjuk fel az előbbi összeg minimumának megkeresését az adott feltétel mellett, és egy más elemi megoldást adunk rá, mint ami [1]-ben olvasható.

A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-féle egyenlőtlenséget próbáljuk alkalmazni. Mint tudjuk, ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tetszőleges valós számok, akkor igaz a következő egyenlőtlenség

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le$$
$$\le (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2),$$

ha a b_i-k nem mind nullák, az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan $\lambda \neq 0$ valós szám, hogy $a_1 = \lambda \cdot b_1$, $a_2 = \lambda \cdot b_2$, ..., $a_n = \lambda \cdot b_n$. (Például [2]-ben.)

A továbbiakban az a problémánk, milyen legyen a szereposztás, hogy jó legyen. Némely kísérletezés után rátalálhatunk a következő változatra:

Legyen $a_i = \sqrt{\frac{L_i}{B_i}}$ és $b_i = \sqrt{B_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Ekkor

$$\left(\sqrt{\frac{L_1}{B_1}} \cdot \sqrt{B_1} + \sqrt{\frac{L_2}{B_2}} \cdot \sqrt{B_2} + \ldots + \sqrt{\frac{L_{P+1}}{B_{P+1}}} \cdot \sqrt{B_{P+1}}\right)^2 \le$$
$$\le \left(\left(\sqrt{\frac{L_1}{B_1}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{L_2}{B_2}}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{\frac{L_{P+1}}{B_{P+1}}}\right)^2\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\left(\sqrt{B_1}\right)^2 + \left(\sqrt{B_2}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{B_{P+1}}\right)^2\right).$$

Vagyis

$$\left(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2} + \ldots + \sqrt{L_{P+1}}\right)^2 \le$$
$$\le \left(\frac{L_1}{B_1} + \frac{L_2}{B_2} + \ldots + \frac{L_{P+1}}{B_{P+1}}\right) \cdot (B_1 + B_2 + \ldots + B_{P+1})$$

így

$$\left(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2} + \ldots + \sqrt{L_{P+1}}\right)^2 \le S \cdot M$$
$$\frac{\left(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2} + \ldots + \sqrt{L_{P+1}}\right)^2}{M} \le S.$$

Ezzel megtaláltuk az S összeg minimumát.

$$S_{\min} = \frac{\left(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2} + \ldots + \sqrt{L_{P+1}}\right)^2}{M}$$

Az előző tétel szerint akkor és csak akkor van egyenlőség az egyenlőtlenségben, ha $L_1 = \lambda \cdot B_1^2$, $L_2 = \lambda \cdot B_2^2$, ..., $L_{P+1} = \lambda \cdot B_{P+1}^2$, vagyis

$$\frac{L_1}{B_1^2} = \frac{L_2}{B_2^2} = \ldots = \frac{L_{P+1}}{B_{P+1}^2}.$$

A továbbiakban a minimum esetén a B-ket kifejezhetjük az L-ekkel és M-mel. Mivel $\frac{L_k}{B_k^2} = \lambda$ $(1 \le k \le P+1$, és k egész szám), ezért $B_k = \frac{\sqrt{L_k}}{\sqrt{\lambda}}$. Ezeket összeadva kapjuk, hogy

$$B_1 + B_2 + \ldots + B_{P+1} = \frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{L_2}}{\sqrt{\lambda}} + \ldots + \frac{\sqrt{L_{P+1}}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Ebből

$$M = \frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{L_2}}{\sqrt{\lambda}} + \ldots + \frac{\sqrt{L_{P+1}}}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\frac{M}{\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2} + \ldots + \sqrt{L_{P+1}}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\frac{M \cdot \sqrt{L_k}}{\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2} + \ldots + \sqrt{L_{P+1}}} = \frac{\sqrt{L_k}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Vagyis

$$B_k = \frac{M \cdot \sqrt{L_k}}{\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2} + \ldots + \sqrt{L_{P+1}}}$$

$(1 \le k \le P+1$, és k egész szám) nagyságú pufferekénél kapjuk a vizsgált keresések minimumát.

Feladat

Vizsgáljuk meg, hogy mennyivel javult az előbb a keresések száma ahhoz képest, ha minden puffer ugyanakkora, vagyis $B_1 = B_2 = \ldots = B_{P+1}$. Ismert, hogy ekkor a keresések száma közelítőleg $\frac{(P+1) \cdot (L_1 + L_2 + \ldots + L_{P+1})}{M}$. (Lásd [1]-et és [3]-at.)

Irodalom

[1] Knuth, Donald E., A számítógép-programozás művészete 3., Műszaki Könyvkiadó, Budapest, (2. kiadás) 386-387. old. (Itt többek között David E. Ferguson, Communications of the Association for Computing Machinery 14 (1971) 476-478. cikkére hivatkoznak.)

[2] Reiman István, Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959-1994., Typotex, Budapest, 541. old.

[3] Knuth, Donald E., A számítógép-programozás művészete 1., Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987. 1.2.3.-31. feladat

Dr. Ambrus Gabriella

A gyakorlás újfajta értelmezése a matematikadidaktikában és a matematikatanárok képzésében

A gyakorlás fontossága a matematika (és több más tárgy) tanulásában nem vitatott és nem is vitatható. Már Comenius szerint is állandó gyakorlásra van szükség, azonban ezt „ügyesen" kell végezni oly módon, hogy ne betanuláshoz, hanem a dolgok megértéséhez vezessen.

A gyakorlás „gyakorlata" azonban inkább a mechanikus begyakorlást helyezte túlzottan is előtérbe.

A XIX-XX. század fordulóján a matematikatanításban bekövetkező reformnak magyar vezéralakja, Beke Manó nem véletlenül vélte úgy eleinte – mintegy ellensúlyozásként –, hogy

eljárások begyakorlására egyáltalán nincsen szükség. Ez azonban a jelek szerint számára is erős túlzásnak bizonyult, mert később módosított álláspontján (vö. Beke 1892 és Beke 1906).

Tette ezt nyilvánvalóan azért, mert a matematikatanulás elképzelhetetlen eljárások rutinszerű ismerete nélkül.

A gyakorlás a matematika tanulásában azonban nemcsak ismeretek, eljárások mechanikus rögzítését jelenti.

A „gyakorlás" a matematikadidaktikai szakirodalomban

A téma fontossága ellenére az idevonatkozó szakirodalom kevés, magyar nyelven pedig szinte alig olvasható valami ebben a témában. A következőkben vázolom a gyakorlással kapcsolatos főbb elképzeléseket a magyar és a német nyelvű szakirodalomból.

Az egyik magyar értelmezés szerint (Iker/Szerencsi/Vörös 1991) míg az ismétlés a tevékenységek egyszerű leutánzását jelenti, a gyakorlás a korábbi ismeretek alkalmazását. Ennek alapján négy nehézségi fokot is megadnak a gyakorlófeladatok esetében.

A német nyelvű szakirodalomban a gyakorlással kapcsolatban általában kétféle típusú meghatározás található:

- Gyakorlás szűkebb értelemben
- Gyakorlás tágabb értelemben

A *szűkebb értelemben* vett definíció a gyakorlás kognitív jellegét emeli ki, hiszen eszerint a gyakorlás ismeretek bevésését, készségfejlesztést, képességek kialakítását, esetleg bizonyos problémamegoldó stratégiák fejlesztését jelenti (Maier 1986, Wittmann 1981).

A *tágabb értelemben* vett meghatározás esetében az előbbiekhez affektív tényezők is társulnak; a gyakorlás magatartásformák, szokások (tanulási, feladatmegoldási, érvelési,...) gyakorlását is jelenti (Walsch/Jungk 1987, Flade/Goldberg 1992, Flade/Pruzina 1992, Claus 1989, Winter 1984).

A gyakorlás fogalmilag több kifejezéssel is kapcsolatba hozható, pl. rögzítés, elmélyítés, szisztematizálás, alkalmazás, ismétlés.

A gyakorlás és ezen kifejezések összefüggése Walsch/Jungk 1987, és Engelmann/Liesenberg 1993 alapján a következőképpen adható meg (1. ábra).

E rendszerben nem vizsgáltam az elmélyítés, szisztematizálás és ismétlés lehetséges átfedéseit. Az ismétlés sajátos helyzetét mutatja, hogy az összes rögzítésformával van közös része.

Ezzel az összefüggésrendszerrel kapcsolatban azonban meg kell jegyezni, hogy nem terjedt el a didaktikai szakirodalomban. Pedagógiai kézikönyvek, lexikonok azonban a gyakorlás meghatározásánál gyakran használják az ismétlés, alkalmazás, bevésés fogalmakat és ezek kapcsolatát a gyakorlással különbözőképpen értelmezik (vö. Ambrus G. 2003).

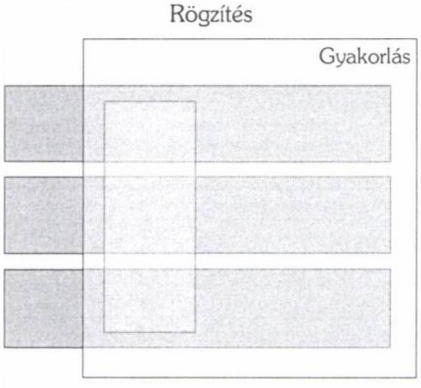
További érdekes elemzésre ad lehetőséget a gyakorlás, probléma, feladat kifejezések összefüggésének vizsgálata. Ezzel kapcsolatban csak azt említeném érdekességként, hogy míg a magyar szóhasználatban a „feladat" gyakorlófeladatot és problémát is jelenthet, német nyelvterületen a „feladat" általában mechanikus begyakoroltató feladatot jelent (Pólya 1977, Hortobágyi 1997, Buth 1995, Blum 1999).

A különböző matematikatanítási irányzatok, módszerek is különbözőképpen értelmezik a gyakorlást, ezt a főbb tanítási irányzatok esetében – hagyományos, „Új Matek", problémamegoldó, genetikus, projektorientált, gyakorlatorientált – elemeztem (vö. Ambrus G. 2003).

Pédaként említeném Varga Tamást, a „Komplex Matematikatanítás–kísérlet" vezetőjét, aki az általa „post-Új Matek"-nek nevezett irányzat létrehozójaként a gyakorlásról megemlíti, hogy csak kétféle gyakorlás létezik: mechanikus és helyes gyakorlás.

A mechanikus gyakorlás „monoton ismételgetés", amely független a meglévő ismeretektől, tapasztalatoktól. A helyes gyakorlás ezzel szemben az új ismeret lehetőleg minél több meglévő ismerethez, tapasztalathoz, minél több különböző szituációban való felhasználása, alkalmazása.

A mechanikus gyakorlást teljesen elveti, mert időigényesnek, értelmetlennek tartja, és



1. ábra

úgy véli, az ismeretszerzés helytelen módjára szoktatja a tanulókat. Az általa helyesnek ítélt gyakorlás tényleges jelentésére pedig igényesen, gazdag matematikai tartalommal összeállított feladataiból lehet következtetni.

Mindezek alapján úgy tűnik, hogy többféle „gyakorlás" létezik, és a részben megadott, illetve kikövetkeztethető elméleti háttér határozza meg jelentését.

Mit gondolnak a gyakorlásról matematikatanárok és matematikaszakos tanárjelöltek?

A felmérést 33 matematikatanár és 22 tanárjelölt bevonásával készítettem 1998/99-ben. A tanárok Budapestiek, felső tagozaton tanítanak és mindannyian az ELTE Főiskolai Matematika Tanszéke által szervezett továbbképzésen vettek részt. A hallgatók ekkor elsőévesek voltak. A válaszadás névtelen volt. Körülbelül 10-15 perc állt rendelkezésükre ahhoz, hogy felírják azokat a legfontosabb ismertetőjegyeket, amelyek a „gyakorlás", valamint „gyakorlás a matematikatanításban" kifejezéssel kapcsolatban eszükbe jut. Témánk szempontjából elsősorban az utóbbi érdekes, így csak ezt ismertetem.

Az eredményeket táblázatba foglaltam. Ebbe azok az ismertetőjegyek kerültek fel, amelyek legalább az egyik kifejezésnél minimum három személynél szerepelnek. Az összehasonlítás kedvéért a (kerekített) százalékértéket is megadtam.

Látható, hogy a gyakorlás leginkább „feladatmegoldás"-t jelent, de gyakran szerepel a „problémamegoldáshoz fontos" kifejezés is. Érdekes, hogy az automatizálással és az alkalmazással kapcsolatos „jegyek" körülbelül egyformán gyakoriak. A felhasználható tudás, mint cél viszonylag alacsony előfordulású.

Elég sokan meghatározzák a gyakorlás helyét is a tanulási folyamatban (6), ami itt a hagyományos „megtanulom-begyakorlom" nézet dominanciáját jelenti.

Nem szerepel viszont egyáltalán, hogy feladatmegoldási stratégiák, tanulási szokások, viselkedésmódok is gyakorolhatók.

Egy általános gyakorlásfogalom hatása az oktatási gyakorlatra

A matematikadidaktikában használatos sokféle meghatározás a gyakorlás fogalmával kapcsolatban nem jelent ellentmondást, inkább egymást kiegészítő jellegűek. Ezért látszott szükségesnek (és lehetségesnek) egy általános gyakorlásfogalmat bevezetni:

A gyakorlás tanulói tevékenység ismeretek, eljárások (gondolkodási műveletek, problémamegoldási stratégiák is), tanulási szokások, magatartásformák elsajátítása céljából.

Ebből következik, hogy a gyakorlás a tanulás-tanítás minden fázisában jelen van, hiszen a tanulói tevékenység ezt végigkíséri, szemben a hagyományos nézettel, amely szerint a gyakorlás a megtanulás után következik.

A *tanulás-tanítás folyamatával* így szervesen összekapcsolódó gyakorlást azzal *együtt kell tervezni.* Ez a tervezés azonban már nyilvánvalóan nem gyakorlófeladatok összeállítását jelenti, hanem annak meghatározását, mi kerüljön gyakorlásra a folyamat során.

Ismertetőjegy	Tanárok		Hallgatók		Összesen	
1. feladatmegoldás	13	39%	14	64%	27	49%
2. problémamegoldáshoz fontos	11	33%	4	18%	15	27%
3. ennek révén tevékenységek automatikussá válnak	9	27%	4	18%	13	24%
4. cél a felhasználható tudás	7	21%	6	27%	13	24%
5. ismétlés	10	30%	2	9%	12	22%
6. új ismeretek elsajátítása után következik	7	21%	4	18%	11	20%
7. elmélyítés	5	15%	4	18%	9	16%
8. képességek elsajátításához kell	9	27%	–		9	16%
9. fontos	3	9%	5	23%	8	15%
10. ennek révén észrevehetők és bepótolhatók a hiányzó ismeretek	3	9%	3	14%	6	11%
11. monoton, mechanikus, unalmas is lehet	2	6%	3	14%	5	9%
12. az ismeretek rögzítéséhez szükséges	1	3%	4	18%	5	9%
13. tananyag, ismeretek elsajátításához kell	2	6%	–		2	4%

„Gyakorlás a matematikatanításban"

A tantervben előírtak elsajátításához gyakorlás szükséges, így a gyakorlás tervezésénél elsődlegesen figyelni kell arra, hogy ez megtörténik-e kellő mértékben. A NAT szerint előírtak alapján így mindenképpen szükség van meghatározott ismeretek és az általános fejlesztési követelmények gyakorlására.

Ehhez a tervezéshez szükséges azonban annak ismerete, hogy adott tevékenység esetén mit várunk el, illetve, hogy mi várható a tanulóktól.

Amennyiben a várható reakciók: megoldások és nehézségek elemzése elmarad, nem is látható, mennyi minden gyakorlásra kerül. Az is előfordulhat, hogy más kerül gyakorlásra, mint amit a tanár tervezett. E tekintetben a tankönyvi mintamegoldások sem mutatnak mindig pozitív irányba, márpedig ezek a megoldások sok tanár számára meghatározók. A következő egyszerű példa egy osztrák tankönyvből való:

1. Példa (6.osztály) (2. ábra)

A megadott tanári megoldás szerint a keresett tükörképpontokat a tanulók körzővel, vonalzóval szerkesztik. Ez azonban nem várható, hiszen a milliméterpapíron ezek egyszerűen berajzolhatók. Így várhatóan tükörképpontok szerkesztése nem kerül gyakorlásra, csak ezek megadása koordinátarendszerben.

A lehetséges megoldások megadása, elemzése tekintetében a tanári kézikönyvek sem mutatnak mindig jó példát. A következő egy igen tartalmas magyar gyakorlófeladat, de a megadott rövid megoldást tekintve ez aligha látszik.

Először a feladatot idézem a kézikönyvben közölt megoldással együtt:

2. Példa (6. osztály)

Melyik osztható 9-cel, melyik nem? „Többet ésszel, mint erővel"!

a) $9 + 48 + 52$ nem
b) $63 + 27 + 999$ igen
c) $9 \cdot 48 + 52$ nem
d) $720 - 113$ nem
e) $11 + 91 + 69$ igen
f) $9 \cdot 98$ igen
g) $90 + 98$ nem
h) $9000 + 90 + 8$ nem
i) $9009 \cdot 8$ igen
j) $15 \cdot 3 \cdot 71$ igen
k) $3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7$ igen
l) $9 \cdot 1001 \cdot 8$ igen

(Szerk.: Csatár K.: Matematika kézikönyv a 6. osztály tanárai számára, 244.o. 188. feladat, Apáczai Kiadó, Celldömölk, 2001)

A megoldás elemzése:

Az idézett tankönyv szerint haladva a tanulók csak később tanulják a kilenccel való oszthatóság szabályát; az előző fejezetben maradékokkal számoltak.

Beispiel 8

Gegeben ist der geschlossene Streckenzug ABCA und eine Gerade g, die durch die Punkte I und II verläuft.

A(0 2), B(2|0,5), C(0,5|3,5); g [I(2|0), II(2|4)]

Spiegle die gegebenen Punkte an der Geraden g! Gib die Koordinaten der gespiegelten Punkte an!

Konstruktionsgang (→ Fig. 160):

1. Zeichne den geschlossenen Streckenzug ABCA und die Gerade g!
2. Zeichne durch A und C jeweils die Normale zu g!
3. Übertrage von g aus mit dem Zirkel: $\overline{Ag} = \overline{A_1 g}$, $\overline{Cg} = \overline{C_1 g}$!

Koordinaten der gespiegelten Punkte:

$A_1(4 \mid 2)$, $B_1(2 \mid 0,5) = B$ (Fixpunkt), $C_1(3,5 \mid 3,5)$

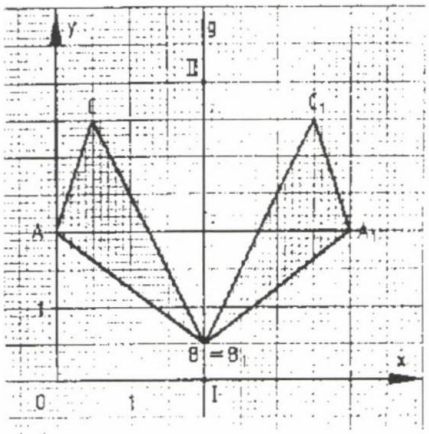


Fig. 160

2. ábra

(Reichel / Litschauer / Gross: Lehrbuch der Mathematik 2. Hölder-Pichler-Tempsky Verlag Wien, 1997 (2000), 145. o.)

Mi várható?

Az *a)* feladat esetében lehet,

1. hogy valaki összeadja a három számot (valószínűleg észreveszi, hogy elég a két utolsó tagot összeadni) és elvégzi a szükséges osztást, hiszen ebben az esetben ez gyorsan elvégezhető
2. hogy megnézi tagonként a kilences maradékokat majd azok összegének kilences maradékát (az előbbi megoldás nem jelent nagyobb munkát, mint ez, sőt...)

Az első esetben a maradékos osztást, és az összeadást gyakorolják, és azt, hogy mit jelent: „egy természetes szám osztható egy másikkal"; a második esetben ehhez hozzájön a maradékokkal való számolás is. Az utóbbi megoldás a gyerekektől kevésbé várható, hiszen minek többet számolni, ha kevesebb is elég. Vajon a szerzők is így gondolták?

Érdemes a gyerekekkel megbeszélni, miért választották az általuk ismertetett megoldást, és a véleményeket esetleg ütköztetni. Ebben az esetben a megértett és tanult fogalmak és eljárások eszközként való használata mellett a fejlődő vitakészség, érvelés, cáfolás kerül gyakorlásra.

A *b)* feladat esetében ránézésre adódik, hogy mindhárom tag a kilenc többszöröse, így az összeg is. Ez a megoldás várható. Valószínűleg kevesebben adják össze pl. először az első két tagot (esetleg mind a hármat) és végzik el a szükséges osztást.

Mi kerül gyakorlásra?

Így itt a kilenc többszöröseinek felismerése és a maradékokkal való számolás, valamint a megértett és tanult fogalmak és eljárások eszközként való használata.

A többi részfeladat esetében az elemzés hasonlóképpen elvégezhető.

A következőkben példát mutatok arra, hogy egy feladat megoldásának elemzése során a tanulóktól elvárt ill. várható megoldás alapján milyen ismeretek és fejlesztési követelmények kerülnek gyakorlásra.

3. Példa (5. osztály)

Mindegyik rajz egy egészet jelent. Melyiknek mekkora része színezett? Indokolj! (3. ábra)

Megoldás

A tanulóknak törtrészeket kell meghatározni és a tanult módon felírni. Az átdarabolhatóság, szimmetriák megfigyelése a későbbi geometriatanulás szempontjából (pl. területszámítások) is fontos tapasztalatgyűjtést jelent.

Mi várható?

Az ilyen típusú feladatok nem ismeretlenek a tanulók számára. A *c)* megoldása valószínűleg több gondolkodást igényel. Azok a tanulók, akik számára a törtrész még nem jelenti az „egyenlő részeket", várhatóan $\frac{1}{4}$ vagy $\frac{2}{5}$ értékeket adnak meg. Fontos, hogy részletesen megbeszéljük, hogyan születtek a jó vagy rossz eredmények. Ennek segítségével a különféle megoldási lehetőségeken túl néhány hibás elképzelést is feltárhatunk, javíthatunk. Az indoklások megfogalmazása fejleszti az ezen a szinten elvárható szaknyelvhasználatot és általában a beszédkészséget.

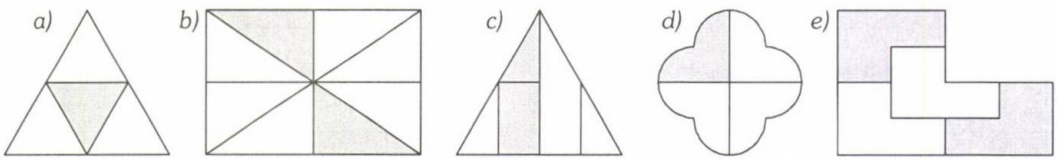
Mi kerül gyakorlásra?

Törtrészek leolvasása, jelölésmód használata, geometriai ismeretek (alakzatok elnevezése, átdarabolás, szimmetriák...), bizonyos gondolkodási műveletek (összehasonlítás, analizálás...).

Az általános fejlesztési követelmények közül:

- gyakorlati tevékenységre épülő, az életkornak megfelelő számfogalom használata,
- a megértett és tanult fogalmak és eljárások eszközként való használata,
- geometriai modellek segítségével fejlődő sík- és térgeometriai szemlélet,
- fejlődő vitakészség, érvelés, cáfolás.

A gyakorlás tervezéséhez használt szempontok (ismeretek, és a fejlesztendő követelmények) a gyakorlás vizsgálata szempontjából alapkritériumokként is felfoghatók, s mint ilyenek további szempontokkal kiegészíthetők. Ilyen kiegészítésként az osztrák tantervből a matematika



3. ábra

(Hajdú S.: Matematika 5. Calibra, Budapest, 1994, 150. o. 5.0 7. feladat alapján)

tárgynál szereplő „fejlesztendő alapkövetelményeket" választottam – ezek tartalmilag több tekintetben eltérnek a már használt magyar megfelelőiktől, és így mintegy kiegészítik azt. Az így kiegészített kritériumrendszer segítségével lehetővé vált – gyakorlással együtt tervezett óratervek felhasználásával – a gyakorlás többszempontú vizsgálata is (Ambrus G. 2003).

Javaslat a „gyakorlás" tanítására a (felső tagozatos) tanárképzésben

A hallgatókkal szükséges mindenekelőtt megismertetni a „gyakorlás"-ra vonatkozó didaktikai irodalom fontosabb részeit. Jó, ha lehetőséget teremtünk egyéni kutatómunkára is, de mivel magyar nyelven alig található valami, ez nyelvi problémákat okozhat.

A megismert szakirodalom alapján a hallgatók megpróbálkozhatnak egy általános gyakorlásfogalom meghatározásával is.

Megismertetjük velük az itt közölt általános gyakorlásfogalmat, majd megvitatjuk ennek előnyeit és összevetjük a hallgatói ötletekkel.

A hallgatókkal együtt (esetleg egyéni dolgozatként) az előbbiekben felvázolt alapkritériumrendszer segítségével órarészleteket, órákat, nagyobb tanítási egységeket tervezünk. Közös megbeszélés során vitatjuk meg, hogy a gyakorlás szempontjából kell-e módosítani a választott feladaton, a feladatok sorrendjén, esetleg más feladatot választani...).

Fontosnak tartom, hogy a hallgatók próbáljanak is ki ilyen módon tervezett órát a gyakorlatban, valamint beszámoljanak tapasztalataikról. Ugyancsak fontos, hogy a beszámolók alapján arra is kitérjenek, mi volt szerintük jó, mit és hogyan változtatnának az eredeti terven.

Az említett, feladatok és a kipróbálás célja, hogy a hallgatók olyan eszköz birtokába jussanak, amely segítségével a gyakorlás a módszertanban megfelelő „rangot" kapva tervezhetővé, vizsgálhatóvá váljék számukra.

Az ismertetett alapkritériumrendszer további bővítése, esetleges átalakítása, ennek elméleti és gyakorlati vizsgálata tudományos diákköri munka és szakdolgozat témája lehet.

Irodalom

[1] Ambrus, G.: Übung in der Planung des Mathematikunterrichts, Doktori dolgozat, Salzburg, 2003

[2] Beke M.: Számtan a középiskolák alsó osztályai számára, Budapest, 1892., Singer és Wolfner kiadása

[3] Beke M.: Számtan a középiskolák számára, átdolgozva az 1899-es tanterv szerint, Budapest, 1906.

[4] Blum, W. / Wiegand, B.: Offene Probleme für den Mathematikunterricht – Kann man Schulbücher dafür nutzen? Előadás: 33. GDM Tagung, Bern 1999.

[5] Buth, M.: Lerntheorien (mit Anwendungen im Mathematikunterricht und im Naturwissenschaftlichen Aufgabenfeld), Franzbecker, 1995.

[6] Claus, H. J.: Einführung in die Didaktik, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1989.

[7] Comenius: Didactica Magna, Seneca Kiadó, Budapest, 1992. Ford.: Geréb Gy.

[8] Engelmann, L. / Liesenberg, G.: Übung macht den Meister! Schülerorientierte Gestaltung täglicher Übungen, In: Mathematik in der Schule, 1993/9.

[9] Flade, L. / Goldberg, L.: Tägliche – erste vielfältige – komplexe Übungen. In: Mathematiklehren, 1992/53.

[10] Flade, L. / Pruzina, M.: Bloß eine Übungsstunde? In: Mathematik in der Schule 1992/5.

[11] Hortobágyi, I.: Aufgabenlösen im problemlösungsorientierten Mathematikunterricht, In: Parisot, K.J. / Vásárhelyi, É.: Integrativer Unterricht in Mathematik, Abakus Verlag, Salzburg, 1997.

[12] Iker, J. / Szerencsi, S. / Vörös, Gy.: A Matematika Tanítása I. (Hrsg.: Ács P.) Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.

[13] Lehrplan 2000, 133. Verordnung: Änderung der Verordnung über Lehrpläne der allgemeinbildenden höheren Schulen; Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht an diesen Schulen, Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich, Jahrgang 2000., Teil II, Ausgegeben am 11. Mai. 2000.

[14] Maier, H.: Zur Übung im Fach Mathematik, In: Pädagogische Welt 1986/3.

[15] Pólya Gy.: A gondolkodás iskolája, [orig.: How to solve it?], Gondolat Kiadó, Budapest, 1977.

[16] Varga T.: Hát a készségekkel hogy állunk? In: Kapcsolat (OPI, Budapest) 1969/8.

[17] Walsch, W. / Jungk, W.: Zum Prozess des Festigens. Sich daraus ergebende Anforderungen an den Unterricht in den Klassen 9,10 /1, Mathematik in der Schule 1987/6.

[18] Winter, H.: Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht, In: Mathematiklehren, 1984/2.

[19] Wittmann, E. Ch.: Grundfragen des Mathematikunterrichts, Vieweg, 1981.

Dr. Urbán János

Beszámoló a XIII. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyről

A XIII. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyt 2004. március 15–20-ig Kárpátalján, a Nagydobronyi Református Liceumban rendezték meg. A rendezők *Ráti Éva* igazgató, főszervező és *Neubauer Ferenc* a kárpátaljai régió vezetője irányításával, igazi vendégszeretettel és mindenre kiterjedő gondoskodással dolgoztak azon, hogy a több mint 200 fős „vendégsereg", versenyzők és kísérő tanárok jól érezzék magukat.

A március 16-i ünnepélyes megnyitó a nagydobronyi református templomban volt hálaadó Istentisztelet keretében. Ezután a református parókia gyülekezeti termében Kárpátalja történetéről és népességének összetételéről, kulturális helyzetéről hallgattak meg a résztvevők érdekes, színvonalas előadásokat. Délután ungvári kirándulás szerepelt a programba.

A 4 órás verseny március 17-én zajlott le. A bírálóbizottság délután a dolgozatokat javította, munkájukat *Gecse Frigyes*, az ungvári egyetem docense irányította.

Március 18-án egész napos kirándulást szerveztek a rendezők Munkácsra a várba, a vereckei hágóra, Szolyvára, Beregvárra. A vereckei hágóra vezető utat még vastag hó borította, az autóbuszok nem tudtak felmenni, csak a hajtűkanyarig. Így a vállalkozó kedvűek gyalog tették meg az utat a hágón található emlékműhöz és vissza. Mivel ez 3 órát vett igénybe a nagy hóban, Beregvárra már nem jutott idő. A kirándulás ennek ellenére mindenkinek emlékezetes marad.

Március 19-én ismét egész napos kirándulás keretében ismerkedhettek meg a résztvevők a környék szépségeivel, különlegességeivel, mégpedig a szlatinai sóbányával, a huszti várral és Beregszász belvárosával.

Március 20-án került sor a hálaadó istentisztelet után a parókia gyülekezeti termében az eredményhirdetésre és a díjkiosztó ünnepségre. A szeretetteljes búcsúzkodás után nehezen ment az autóbuszokba való beszállás és a hazautazás. Az anyaországi régió versenyzői nagyon szép eredményekkel tértek haza.

Az egyes évfolyamok versenyében a következők kaptak díjakat:

9. osztály

I. díjasok:
Nagy Csaba, Budapest, Fazekas M. Gimn.
Vidnyánszky Zoltán, Beregszász, Beregszászi Magyar Gimn.
Farkas Adám László, Miskolc, Földes F. Gimn.

II. díjasok:
Szudi László, Bonyhád, Petőfi S. Evang. Gimn.
Nagy Alíz, Nagyvárad, Ady Endre Lícium

III. díjasok:
Gyürke Csaba, Budapest, Berzsenyi D. Gimn.
Dénes Péter, Csíkszereda, Márton Áron Gimn.
Varga Bernadette, Csíkszereda, Márton Áron Gimn.
Lóska Ádám, Debrecen, Fazekas M. Gimn.
Györök Péter, Kaposvár, Táncsics M. Gimn.

10. osztály

I. díjas:
Kis Gergely , Budapest, Fazekas M. Gimn.

II. díjasok:
Csorba János, Győr, Apor Vilmos Kat. Isk. közp.
Jankó Zsuzsanna, Szeged, Radnóti M. Gimn.

III. díjasok:
Sebestyén-Pál Katalin, Kolozsvár, Báthory I. Líceum
Farkas Csaba, Székelykeresztúr, Orbán B. Líceum
Patrubány Anna, Kolozsvár, Báthory I. Líceum
Ureczky Bálint, Kaposvár, Táncsics M. Gimn.
Padrah Zoltán, Máramarossziget, Leövey K. Líc.
Németh Zsolt, Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn.
Szűcs Gábor, Komárom, Selye J. Gimn.

11. osztály

I. díjas:
Miklós Gábor, Csíkszereda, Márton Á. Gimn.

II. díjasok:
Széles Ádám István, Csíkszereda, Márton Á. Gimn.
Eckert Bernadett, Bonyhád, Petőfi S. Ev. Gimn.
Czank Tamás, Miskolc, Földes F. Gimn.
Bálint Levente, Székelyudvarhely, Tamási Áron Gimn.

III. díjasok:
Koreck Péter, Szeged, Radnóti Miklós Gimn.
Seres Gyula , Budapest, Fazekas M. Gimn.
Kirilly Miklós, Budapest, Berzsenyi D. Gimn.

12. osztály

I. díjasok:
Fehér Gábor, Budapest, Berzsenyi D. Gimn.
Egri Attila, Hajdúszoboszló, Hőgyes Endre Gimn.

II. díjasok:
Birkus Róbert, Galánta, Kodály Z. Gimn.
Horváth Márton, Budapest, Fazekas M. Gimn.

III. díjasok:
Sipos Tamás, Nagyvárad, Ady E. Elméleti Líceum
Makky László, Dunaszerdahely, Vámbéry Ármin Gimn.
Zanaty Péter, Kaposvár, Táncsics M. Gimn.
Balogh Tamás, Debrecen, Kossuth L. Gyak. Gimn.
Darvas Tamás, Barót, Baróti Szabó D. Isk. csop.
Hegyháti Máté, Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn.
Kórus Péter, Szeged, Radnóti M. Gimn.

A versenyen a következő feladatokat tűzték ki:

9. osztály

1. Egy kis erdei tavat egy forrás táplál friss vízzel. Egyszer megjelent egy 183 tagú elefántcsorda és egy nap alatt kiitta a tó vizét. Később, mikor újra megtelt a tó, egy 37 tagú csorda 5 nap alatt itta ki a vizet. Egy elefánt hány nap alatt inná ki a tó vizét?

Dr. Katz Sándor (Bonyhád)

2. Az 1, 2, 3, ..., 2000, 2001, 2002, 2003, 2004 számokat valamilyen sorrendben egymás mellé írjuk. Lehet-e az így kapott új szám négyzetszám?

Dr. Kántor Sándorné (Debrecen)

3. Az $ABCD$ téglalapban $AD = 3AB$. Az E és F pontok AD-t három egyenlő részre osztják. Mennyi a BEA, BFA és BDA szögek összege?

Balázsi Borbála (Beregszász)

4. Az a, b és c pozitív számok egy háromszög oldalainak hosszát jelölik, és $3b^2 = 2(c^2 - a^2)$. Mekkora lehet a $\frac{b}{a}$ tört értéke.

Bogdán Zoltán (Cegléd)

5. Igazolja, hogy a háromszög szögfelezőinek metszéspontja és a háromszög csúcsai közötti távolságok négyzeteinek összege nem kevesebb a háromszög kétszeres területénél!

Bencze Mihály (Brassó)

6. Bizonyítsa be, hogy ha p és q egynél nagyobb prímszám, akkor $7p^2 + 11q^2 - 39$ nem prímszám.

Oláh György (Komárom)

7. Oldja meg a

$$(p-x)^2 + \frac{2}{x} + 4p = \left(p + \frac{1}{x}\right)^2 + 2x$$

egyenletet az egész számok halmazán, ha a p paraméter egész szám!

Bíró Bálint (Eger)

10. osztály

1. Két gépkocsi halad az autópályán egy irányban. A köztük lévő távolság jelenleg 2 km, és minden n-edik percben $\frac{1}{n^2}$ km-rel csökken. Utoléri-e a második jármű az előtte haladót?

Gecse Frigyes (Ungvár)

2. A k_1 és k_2 körök az A és B pontokban metszik egymást. A k_1 kör tetszőleges (A-tól és B-től különböző) K pontját összekötjük az A és B pontokkal. A KA és KB egyenesek a k_2 kört másodszor a P és Q pontokban metszi. Bizonyítsa be, hogy a PQ húr merőleges a k_1 kör KM átmérőjére.

Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

3. Melyek azok a természetes n számok, melyekre $n^2 - 440$ teljes négyzet!

Kántor Sándorné (Debrecen)

4. Létezik-e olyan x és y természetes szám, melyekre $7^x - 5^y = 2004$?

Kacsó Ferenc (Marosvásárhely)

5. Adott a térben hat tetszőleges pont. Ezeket összekötjük az összes lehetséges módon. Igazolja, hogy azon három szakasz felezőpontjai által alkotott háromszögek súlypontjai, amely szakaszoknak páronként nincs egy közös végpontja, egybeesnek.

Bencze Mihály (Brassó)

6. Egy trapézba, melynek egyik szára 40 cm, területe 1280 cm^2, kör írható. A trapéz magassága az alapok mértani közepe. Bizonyítsa be, hogy a trapéz köré is írható kör, és számítsa ki a beírt és köré írt körök középpontjai közötti távolságot!

Gecse Frigyes (Ungvár)

7. Az $\frac{a}{b}$ közönséges tört tizedes tört alakja olyan végtelen szakaszos tizedes tört, amelynek szakasza $(b-1)$ számjegyből áll. Az a és b számok pozitív egészek. Fejezzétek ki az egy szakaszban lévő jegyek összegét b-vel!

Bogdán Zoltán (Cegléd)

11. osztály

1. Bizonyítsa be, hogy $9^n - 8n - 1$ osztható 64-gyel, ahol n nem negatív egész szám.

Oláh György (Komárom)

2. Igazolja, hogy a különböző oldalú háromszögben a legkisebb szög csúcsából húzott szögfelező a leghosszabb!

Dr. Kántor Sándor (Debrecen)

3. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\sqrt{4x^2-4x+2}=\frac{\sqrt{2}-\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2}{\sqrt{\frac{1}{2x-1}}}.$$

Bíró Bálint (Eger)

4. Az ABC háromszögben $AB = 4$ cm, $AC = 8$ cm, $A\sphericalangle = 120°$. Az F pont a háromszög köré írt kör BAC ívének felezőpontja. Mekkora távolságra van az F pont a háromszög magasságainak metszéspontjától?

Neubauer Ferenc (Munkács)

5. A P és Q pontok úgy helyezkednek el az ABC háromszög BC oldalán, hogy a létrejövő szakaszok aránya. $BP : PQ : QC = 1 : 2 : 3$. Az R pont a háromszög AC oldalát a következőképpen harmadolja: $AR : RC = 1 : 2$. Az M és N pontok a BR szakasznak az AQ és az AP szakaszokkal való metszéspontjait jelöli. Határozza meg a $PQMN$ négyszög területét, ha az ABC háromszög területe 24 cm^2.

Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

6. Bizonyítsa be, hogy ha az a, b és c valós számokra teljesül a $0 < a < b < c$ feltétel, akkor az $(a+b+c)x^2 - 2(ab+bc+ac)x + 3abc = 0$ egyenletnek két különböző valós gyöke van, és az egyik gyök az a és b közé, a másik a b és c közé esik.

Dr. Katz Sándor (Bonyhád)

7. Egy háromszög egyik csúcsából kiinduló magasság, szögfelező és oldalfelező az illető szöget rendre x, y, x, y szögekre osztja. Igazolja, hogy $\sin^3(x+y) = \sin x \cos y$.

Bencze Mihály (Brassó)

12. osztály

1. Mennyi a legkisebb értéke az

$$f(x)=\log_{x^2-2x+2005}\frac{\sqrt{2004}}{2004}$$

függvénynek?

Szabó Magda (Szabadka)

2. Oldd meg a következő egyenletet:

$$4^{\sin x}\cdot 5^{-\sin^{-1}x}+4^{-\sin x}\cdot 5^{\sin^{-1}x}=\frac{629}{50}.$$

Bencze Mihály (Brassó)

3. Egy háromszög oldalai 13 cm, 14 cm, 15 cm. Mekkora a távolság a háromszög súlypontja és a köré írt kör középpontja között?

Kicska György (Munkács)

4. Bizonyítsa be, hogy egy hegyesszög radiánmértéke kisebb, mint szinuszának és tangensének számtani közepe.

Bogdán Zoltán (Cegléd)

5. Igazolja, hogy $\sin 1°$, $\cos 1°$ és $\mathrm{tg}\,1°$ számok irracionálisak!

Gecse Frigyes (Ungvár)

6. Bizonyítsa be, hogy a háromszögbe írt kör r sugarára, a hozzáírt körök r_a, r_b, r_c sugaraira és a háromszög p félkerületére érvényes a $\sqrt{r\cdot r_a}+\sqrt{r\cdot r_b}+\sqrt{r\cdot r_c}\le p$ egyenlőtlenség. (A háromszög hozzáírt körének nevezzük a háromszög egyik oldalát kívülről érintő, és a másik két oldal meghosszabbítását érintő kört.)

Oláh György (Komárom)

7. Legyen

$$a_n=\frac{1}{n}\left(\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\ldots+\sqrt{n\cdot(n+1)}\right),$$

ahol n nullától különböző természetes szám. Bizonyítsa be, hogy a_n egészrésze egyenlő $\frac{n+1}{2}$ egészrészével.

Kacsó Ferenc (Marosvásárhely)

Polcz Katalin – Poronyi Gábor

Beszámoló a 2004. évi Gordiusz Matematika Tesztversenyről

Pécsi matematikatanárok az általános iskolások Zrínyi Ilona Matematikaversenyének folytatásaként 1996-ban feleletválasztós tesztversenyt rendeztek középiskolásoknak Baranya megyében. A kedvező fogadtatáson felbuzdulva a következő évtől kezdve már a kétfordulós (megyei/körzeti verseny, majd országos döntő Pécsett) Gordiusz Matematika Tesztversenyt hirdették meg és bonyolították le. A diákok hamar megszerették ezt a versenyt, így évről évre nőtt a helyszínek és versenyzők száma. 2004-ben az ország tizenkilenc megyéjéből Budapest öt körzetéből, Erdélyből, Felvidékről, Kárpátaljáról és Vajdaságból 12 560 diák nevezett a Gordiuszra.

Az első fordulóban és a döntőben is 90 perc alatt 30 (évfolyamonként különböző) feladatot kellett megoldani és öt válaszból az egyetlen helyeset kiválasztani. A feladatsorokat pécsi középiskolai tanárok: Poronyi Gábor (9. évf.), Sáráné Dombi Anna (10. évf.), Bereczkiné Székely Erzsébet (11. évf.) és Polcz Katalin (12. évf.) állították össze.

Az első forduló február 25-én volt a körzeti szervezők által kijelölt helyszíneken. Ennek eredményei alapján 89 iskola 202 diákja kapott meghívást az április 3-án Pécsett megrendezett döntőre. A Leőwey Klára Gimnáziumban volt a megnyitó és a verseny. A versenyt közös feladatmegoldás követte, majd a versenyzők és kísérőik részére városnézés, mecseki séta, műsoros est egészítette ki a programot.

A válaszok számítógépes kiértékelése után másnap, április 4-én a Pécsi Művészeti Szakközépiskola hangversenytermében volt az ünnepélyes eredményhirdetés, melyen a Művészeti Szakközépiskola diákjai adtak műsort. A döntő minden résztvevője oklevelet kapott, évfolyamonként az első tizenkét helyezett jutalmat is.

Eredmények

9. évfolyam

1. Rózsa Levente, Veres Péter Gimnázium, Budapest
2. Dudás János, Bethlen Gábor Református Gimnázium, Hódmezővásárhely
3. Gyenizse Gergő, Kiskunhalasi Református Kollégium Gimnáziuma, Kiskunhalas
4. Kasza László, Török Ignác Gimnázium, Gödöllő
5. Szűcs Gábor, Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc
6. Bus Norbert, Jedlik Ányos Gimnázium, Budapest

10. évfolyam

1. Herczeg Péter, Verseghy Ferenc Gimnázium, Szolnok
2. Dányi Zsolt, Kossuth Lajos Gimnázium és Szakközépiskola, Tiszafüred
3. Jankó Zsuzsanna, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged
4. Tóth Fanni, Tokaji Ferenc Gimnázium, Tokaj
5. Pesti Veronika, Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium, Budapest
6. Jobbágy László, Árpád Vezér Gimnázium, Sárospatak

11. évfolyam

1. Tassy Gergely, Veres Péter Gimnázium, Budapest
2. Strenner Balázs, Teleki Blanka Gimnázium, Székesfehérvár
3. Németh Bertalan, Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét
4. Ujváry Áron, Bolyai János Gimnázium, Salgótarján
5. Poronyi Balázs, Janus Pannonius Gimnázium, Pécs
6. Pálinkás Csaba, Verseghy Ferenc Gimnázium, Szolnok

12. évfolyam

1. Egri Attila, Hőgyes Endre Gimnázium, Hajdúszoboszló
2. Pongrácz András, Verseghy Ferenc Gimnázium, Szolnok
3. Konfár András, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged
4. Bácsi Ádám, Katona József Gimnázium és Szakközépiskola, Kecskemét
5. Tolvaj Botond, Ciszterci Szent István Gimnázium, Székesfehérvár
6. Lechner Ádám, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged

Pécs Megyei Jogú Város különdíját kapták Róna Géza főtanácsostól az egyes évfolyamokon legjobban szerepelt határon túli versenyzők: a 9. évfolyamon Takács Árpád (Svetozar Markovic Gimnázium, Szabadka), a 10. évfolyamon Daday Csaba (Ady Endre Elméleti Gimnázium, Nagyvárad), a 11. évfolyamon Mátyás Péter (Selye János Magyar Gimnázium, Komárom). (A 12. évfolyamon egyetlen meghívott határon túli versenyző sem tudott eljönni a döntőre más, számukra fontos versenyek miatt.)

A legjobban szerepelt baranyai versenyző, Poronyi Balázs (Janus Pannonius Gimnázium, Pécs) a Baranyai Pedagógiai Szakszolgálatok és Szakmai Szolgáltatások Központjának különdíját vette át Kucsanda Ibolya igazgatónőtől.

A szervező bizottság különdíját kapta meg Poronyi Gábortól az a hét tizenkettedikes diák, akik négy alkalommal voltak a döntő résztvevői: Csorba Beáta (Neumann János Közgazdasági Szakközépiskola, Eger), Egri Attila (Hőgyes Endre Gimnázium, Hajdúszoboszló), Hudáky Zsuzsa (Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc), Lechner Ádám (Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged), Pongrácz András (Verseghy Ferenc Gimnázium, Szolnok), Tolnai Gábor (Janus Pannonius Gimnázium, Pécs), Török Zoltán (Török Ignác Gimnázium, Gödöllő).

Sok más információ mellett a teljes eredménylista és a döntőn készült képek is megtalálhatók a verseny honlapján: www.extra.hu/gordiusz-matek.

Az alábbiakban a döntő feladatsoraiból mutatunk meg ízelítőül néhány olyan feladatot, melyek több évfolyam feladatsorában is szerepeltek:

1. Hencidából Boncidába az LX01 típusú repülőgép 3 óra alatt, az LY02 típusú repülőgép 3,5 óra alatt ér el. Ha a két gép egyszerre indult Hencidából, hány óra múlva lesz (egy tizedre kerekítve) a lassúbb gép kétszer olyan távolságra Boncidától, mint a gyorsabb.

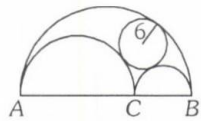
(A) 1,4 (B) 1,9 (C) 2,2
(D) 2,6 (E) Ilyen helyzet nincs.

2. Mivel egyenlő $a+b$, ha $2^a \cdot 9^b = \overline{2a9b}$? ($\overline{2a9b}$ négyjegyű egész szám.)
(A) 4 (B) 7 (C) 8 (D) 12 (E) 16

3. Mennyi a periódusa az $f(x) = \sin\frac{x}{2004}$ függvénynek ($x \in \mathbb{R}$)?
(A) π (B) 2π (C) 2004π (D) 4008π (E) 2004

4. Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyek csúcspontjainak koordinátái egy síkbeli derékszögű koordinátarendszerben a –1, 0, 1 számok közül valók. Az összes háromszög területét kiszámítva, hány különböző érték adódik?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 4-nél több

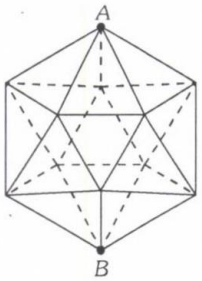
5. Az AB szakasz B-hez közelebbi harmadolópontja C. Az AB, AC és BC szakaszok, mint ármérők fölé az AB egyik oldalán rajzolt félkörök mindegyikét érintő kör sugara 6 cm. Hány cm hosszú az AB szakasz?



A 34 (B) 36 (C) 38 (D) 40 (E) 42

6. Egy 100 cm oldalú négyzetbe 10 000 darab 1 cm átmérőjű kört tudunk úgy behelyezni, hogy 100 sorba rakjuk őket és minden sorba 100 kört teszünk. Ha a köröket úgy helyezzük el, hogy bármely három egymást kölcsönösen érintő kör középpontja szabályos háromszöget alkot, akkor mennyivel több kör fér el a négyzetben?
(A) 647 (B) 1343 (C) 1344
(D) 1442 (E) 1443

7. Egy egységnyi oldalélű szabályos ikozaéder (olyan test, melynek 20 egybevágó szabályos háromszög oldallapja van) A csúcsából egy hangya szeretne elmászni B-be. Hány egység hosszú a legrövidebb út a felszínen.



(A) $\sqrt{3}+1$ (B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
(D) $\sqrt{7}$ (E) 3

Megoldások: DBDDEED

A XXXIII. Országos Kalmár László Verseny megyei fordulójának feladatai és megoldásai (5–8. osztály)

Ötödik osztály

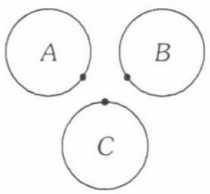
1. Hány 0 számjegy van a következő összeadás eredményeként kapott számban?

$$3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{333\ldots3}_{10 \text{ db } 3\text{-as}}$$

(Zsebszámológép nélkül számolj!)

2. Van 72 egybevágó (egyforma) kis kockánk. Hányféle különböző téglatestet tudunk ezekből építeni, ha mindet fel kell használni az építéshez?

3. Három kerékpáros az ábrán látható elhelyezkedésű három kör alakú pályán tart edzést. Megállapodnak abban, hogy az A kerékpáros óránként 48 kört, a B 36 kört, a C pedig 24 kört tesz meg. Egyszerre indulnak a megfelelő pályák megjelölt pontjáról, 40 perc múlva abbahagyják az edzést. Milyen időpontokban értek egyszerre vissza a kiindulási helyzetbe edzés folyamán?



4. Egy műhelyből a mester nem sokkal 12 óra után elment ebédelni. Távozáskor megnézte a faliórát. Miután körülbelül egy óra múlva visszaért, újra rápillantott a faliórára, és megállapította, hogy amíg távol volt, az óra kis és nagy mutatója éppen helyet cserélt. Hány percig volt távol a mester?

Az 5. osztály feladatainak megoldása

1. Az összeadást közvetlenül elvégezve:

$$3 + 33 + 333 + \ldots + 3333\ldots3 = \\ = 3703703700,$$

tehát a kapott szám 4 darab 0 számjegyet tartalmaz.

2. A téglatestek lehetséges méreteit (hosszúság, szélesség, magasság) az egyes tényezők jelentik, a kis kockák élében mérve.
Így a következő méretű téglatestek építhetők:

$1 \cdot 1 \cdot 72$,	$2 \cdot 2 \cdot 18$,	$3 \cdot 3 \cdot 8$
$1 \cdot 2 \cdot 36$,	$2 \cdot 3 \cdot 12$,	$3 \cdot 4 \cdot 6$
$1 \cdot 3 \cdot 24$,	$2 \cdot 4 \cdot 9$,	
$1 \cdot 4 \cdot 18$,	$2 \cdot 6 \cdot 6$	
$1 \cdot 6 \cdot 12$,		
$1 \cdot 8 \cdot 9$		

Összesen 12 különböző téglatest építhető.

3. A versenyzők indulás után először 5 perc múlva (azaz $\frac{1}{12}$ óra múlva) találkoztak. Eddig az A 4 kört, a B 3 kört, a C pedig 2 kört tett meg. Tehát 5 perc után mindhárman a kiindulási helyzetbe értek.
A továbbiak során minden 5 perc elteltével újra egyszerre értek a kiindulási helyzetbe, tehát összesen 8 olyan időpont volt az edzés során, amikor találkoztak (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 perccel a kezdés után).

4. Ha az óra kis és nagy mutatója helyet cserélt, akkor a két mutató együtt éppen egy teljes kört járt be.
Miután a percmutató 12-szer olyan gyorsan jár, mint az óramutató, az óramutató $\frac{1}{13}$, a percmutató $\frac{12}{13}$ részét tette meg a teljes körnek. Ez azt jelenti, hogy $\frac{12}{13}$ órát, azaz $12 \cdot \frac{60}{13} = 55\frac{5}{13}$ percig volt távol a mester.

Hatodik osztály

1. Melyek az *aabb* alakú négyjegyű négyzetszámok (*a* és *b* számjegyek, $a \neq 0$)? (Négyzetszám: egy egész szám négyzete, azaz önmagával való szorzata.)

2. A 6. a. osztályban 32-en írták meg a legutóbbi matematika dolgozatot. Ebben egy tanuló 15 hibát vétett, a többiek kevesebbet. Igaz-e, hogy van legalább három olyan tanuló az osztályban, akik ugyanannyi hibát vétettek?

3. Egy szabályos (egyenlő oldalú) háromszöget a középpontja körül 60°-kal elforgatunk. Az eredeti és az elforgatott háromszög közös része egy hatszög. Hányad része a háromszög területének a hatszög területe?

4. Hány olyan hatjegyű tízes számrendszerbeli szám van, amely csak 1-es és 2-es számjegyekből épül fel (lehet, hogy csak egyikféle van benne), és nincs benne két szomszédos 2-es számjegy?

A 6. osztály feladatainak megoldása

1. A keresett számok

$$1100a + 11b = 11(100a + b)$$

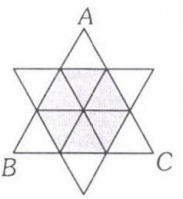
alakban írhatók, tehát oszthatók 11-gyel.
A 11-gyel osztható kétjegyű számok négyjegyű négyzetét kell vizsgálni:

$33^2 = 1089$, $44^2 = 1936$,
$55^2 = 3025$, $66^2 = 4356$,
$77^2 = 5929$, $88^2 = 7744$,
$99^2 = 9801$

A felsoroltak közül egyedül a $88^2 = 7744$ a megfelelő.

2. A feltétel szerint 31 tanuló volt, aki 14, vagy annál kevesebb hibát vétett.
Ha legfeljebb csak két tanuló volt, aki azonos számú hibát vétett, akkor a hibák száma lehetett 0, 1, 2, 3, ..., 13, 14, összesen tehát 15, mindegyiket legfeljebb 2 tanuló vétette, ez összesen csak 30 tanuló lenne.
Ezért a 31 tanuló közt biztosan van legalább három, aki azonos számú hibát vétett.

3. Az eredeti és az elforgatott szabályos háromszög az ábrán látható:



Az ábrán bevonalkázott 6 egybevágó szabályos háromszög alkotja a két háromszög közös részét képező hatszöget. Az *A*, *B* és *C* csúcsok mellett fehéren maradó kis szabályos háromszögek egybevágók a hatszögbeli háromszögekkel.
Ebből következik, hogy a hatszög területe az *ABC* háromszög területének $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ része.

4. A hatjegyű szám jegyei között lehet 0, 1, 2 vagy 3 darab 2-es, több nem, mert akkor két 2-es már egymás mellé kerülne.
Ha a számban csak 1-esek vannak, akkor a hatjegyű szám: 111111. Ha egy 2-es számjegy van benne, azt 6 helyre lehet tenni, ez 6 lehetőség.
Ha két 2-es van a számban, akkor négy 1-es. A négy 1-es közé összesen 5 helyre tehetünk 2-est, az 5 közül kell 2-t kiválasztani, ez $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ lehetőség.
Végül a három 2-es számjegy mellett három 1-es számjegy van, ez a következő 4 lehetőséget adja:

2 1 2 1 2 1, 2 1 2 1 1 2,
2 1 1 2 1 2, 1 2 1 2 1 2.

Összesen tehát $1 + 6 + 10 + 4 = 21$ ilyen szám van.

Hetedik osztály

1. Az *a* és *b* számjegyek, és $a \neq 0$. Mutassuk meg, hogy az *ababab* alakú hatjegyű tízes számrendszerbeli számok oszthatók 777-tel!

2. Tudjuk, hogy 15 különböző pozitív egész szám összege 123. Melyek lehetnek ezek a számok?

3. Egy egyenlőszárú háromszöget az egyik szögfelezője két egyenlőszárú háromszögre vág szét. Mekkorák lehetnek a háromszög szögei?

4. Melyik szám kisebb, $2^{100}+3^{100}$, vagy 4^{100}? Zsebszámológép használata nélkül döntsd el!

5. Az első tíz pozitív egész számot tetszőleges sorrendben írtuk le. Ezután minden számhoz hozzáadtuk azt a számot, ahányadik helyen áll a leírt számsorban. Mutassuk meg, hogy az így kapott tíz összeg között lesz legalább kettő, amelyik azonos számjegyre végződik!

Az 7. osztály feladatainak megoldása

1. Az *ababab* alakú hatjegyű tízes számrendszerbeli szám így írható:

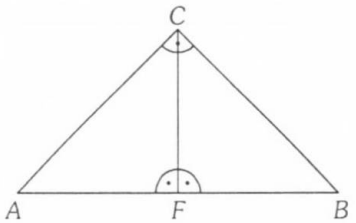
$$100000a+10000b+1000a+100b+$$
$$+10a+b=101010a+10101b=$$
$$=10101(10a+b)$$

Mivel $10101=3\cdot 7\cdot 13\cdot 37=13\cdot 777$, az adott szám osztható 777-tel.

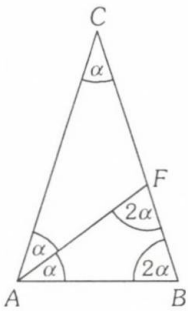
2. A 15 legkisebb pozitív egész szám összege: $1+2+3+\ldots+13+14+15=120$.
A keresett számok összege ennél 3-mal nagyobb. Így a következő számok jöhetnek szóba:
1. a 15-öt 18-ra cseréljük.
2. a 14-et 17-re cseréljük.
3. a 13-at 16-ra cseréljük.

Szóba jöhetne még, hogy a 3 legnagyobb számot 1-gyel növeljük, így ugyanazokat a számokat kapjuk, mint a 3. esetben.
Lehetne még a legnagyobbat 2-vel, az utána következő 14-et 1-gyel növelni, ekkor ugyanazokat kapjuk, mint a 2. esetben. Tehát csak a 3. felsorolt lehetőség jó.

3. Ha az egyenlőszárú háromszög szárak közti szögeinek felezője osztja két egyenlőszárú háromszögre az ABC háromszöget, akkor $AF=FC$ és $BF=FC$. Mivel CF merőleges AB-re, AFC és BFC egyenlőszárú derékszögű háromszögek, így hegyesszögeik 45°-osak. Ekkor az ABC háromszög szögei tehát 45°, 45° és 90°.



Ha az egyik alapon fekvő szög felezője (és így a másiké is) vágja két egyenlőszárú háromszögre az ABC háromszöget, akkor $AB=AF$ és $AF=FC$. Az ábrán α-val jelölt szögek tehát egyenlők, $AFB\sphericalangle=2\alpha$, mert az AFC háromszög külső szöge, de akkor $ABC\sphericalangle=2\alpha$ is igaz.
Az ABF háromszög szögeinek összege 180°, tehát $5\alpha=180°$, $\alpha=36°$. Az ABC háromszög szögei: 72°, 72° és 36°.



4. Mivel $2<3$, $2^{100}<3^{100}$, így $2^{100}+3^{100}<2\cdot 3^{100}$.

$$2\cdot 3^{100}<4^{100}, \text{ mert } 2<\frac{4^{100}}{3^{100}}=\left(\frac{4}{3}\right)^{100},$$

hiszen

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}>2 \quad \text{és} \quad \left(\frac{4}{3}\right)^3<\left(\frac{4}{3}\right)^{100}$$

Tehát $2^{100}+3^{100}<4^{100}$.

5. Jelöljük a számokat a leírt sorrendben így: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9, a_{10}$.
Az egyes összegek ekkor a következők:

$$a_1+1,\ a_2+2,\ a_3+3,\ \ldots,\ a_9+9,\ a_{10}+10.$$

A kapott 10 összeg összege:

$$2\cdot(1+2+3+\ldots+10)=110,$$

tehát 0-ra végződik.
Ha a 10 összeg csupa különböző számjegyre végződne, akkor az összegek össze-

gének utolsó jegye a következő összeg utolsó jegye lenne:

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45, \quad \text{tehát } 5.$$

Így nem lehet, hogy a 10 szám csupa különböző jegyre végződik, van köztük legalább kettő azonos számjegyre végződő.

Nyolcadik osztály

1. Adott 9 pozitív egész szám: a_1, a_2, a_3, ..., a_8, a_9. Ugyanezek a számok, csak más sorrendben legyenek b_1, b_2, ..., b_8, b_9. Mit állíthatunk az $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\ldots(a_8-b_8)(a_9-b_9)$ szorzatról, páros, vagy páratlan szám?

2. Egy trapéz két párhuzamos oldala 10 és 4 egység. Számítsuk ki a trapéz átlóinak felezőpontját összekötő szakasz hosszát!

3. Melyik lehet az az *ABC* alakú tízes számrendszerbeli háromjegyű szám, amelyet önmagával szorozva (négyzetre emelve) egy *DEDABC* alakú hatjegyű számot kapunk? (Azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.)

4. Határozzuk meg a következő függvény legkisebb értékét:

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 10}{2x - 6}, \quad x > 3.$$

5. Adott a síkon két pont, *P* és *Q*. A *P* pontot sorra tükrözzük a *Q*-n áthaladó egyenesekre. Milyen ponthalmazt alkotnak az így kapott *P'* pontok?

A 8. osztály feladatainak megoldása

1. Adjuk össze a kilenctényezős szorzat tényezőit.

$$a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + \ldots + a_8 - b_8 + a_9 - b_9 = \\ = (a_1 + a_2 + \ldots + a_8 + a_9) - \\ - (b_1 + b_2 + \ldots + b_8 + b_9) = 0,$$

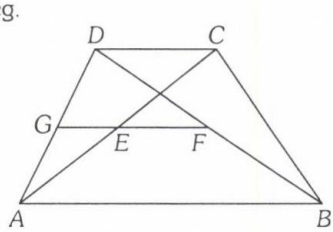
hiszen a két zárójeles összegben ugyanazok a számok szerepelnek, csak más sorrendben.

A 9 szám összege tehát páros szám, így nem lehet mindegyik páratlan, mert 9 páratlan szám összege páratlan szám lenne.

A számok között tehát van páros, így a szorzat páros.

2. Az ábra jelöléseit használjuk. Jelölje *G* az *AD* oldal felezőpontját. A *G*-ből induló *AB*-vel és így *DC*-vel is párhuzamos egyenes az *E*, illetve *F* pontban metszi az *AC*, illetve *BD* átlót. *E* az *AC*, *F* a *BD* felezőpontja, mert *GE* az *ACD*, *GF* az *ABD* háromszög középvonala.

Így $GF = 5$, $GE = 2$ egység, tehát $EF = 3$ egység.



3. Jelöljük röviden *x*-szel az *ABC* háromjegyű számot, ekkor $x^2 = DEDABC$, tehát $x^2 - x = x(x-1)$ olyan hatjegyű szám, amelynek utolsó 3 számjegye 0, tehát osztható 1000-rel. Mivel x és $x-1$ legnagyobb közös osztója 1; $1000 = 8 \cdot 125$, a két tényező közül az egyik 8-cal osztható, a másik 125-tel osztható páratlan szám.

A 125-tel osztható 3 jegyű páratlan számok: 125, 375, 625 és 875. Ezek közül csak 2-nek van 8-cal osztható szomszédja. 376 osztható 8-cal és 624 osztható 8-cal. Az *x* értékére tehát 376 és 625 jöhet szóba.

$376^2 = 141376$, ez megfelelő,
$625^2 = 390625$, ez nem jó.

Tehát az egyetlen jó megoldás: 376.

4. Vázlatrajz készítése, vagy néhány érték kiszámítása után kialakul az a sejtés, hogy a függvény legkisebb értéke 1.

A sejtés bizonyítása:

$$\frac{x^2 - 6x + 10}{2x - 6} \geq 1.$$

Mivel $2x - 6 > 0$, mindkét oldalt szorozhatjuk $(2x - 6)$-tal.

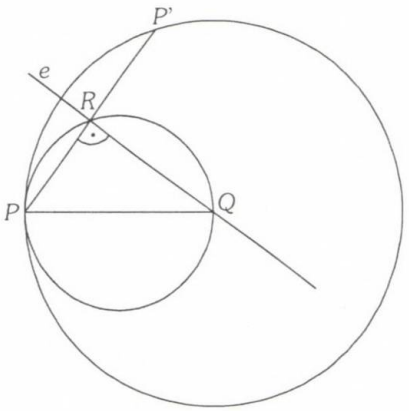
$$x^2 - 6x + 10 \geq 2x - 6.$$

Ebből rendezéssel:

$$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2 \geq 0$$

igaz, és a lépések megfordíthatók.
Az egyenlőség csak $x = 4$ esetén teljesül.
A függvény legkisebb értéke tehát 1, és ezt az $x = 4$ helyen veszi fel.

5. Az ábra jelöléseit használjuk. A Q pontra illesztett e egyenesre tükrözzük P-t, a tükörkép P'. A PP' merőleges e-re, az R metszéspontok Thales-tétele miatt a PQ átmérőjű körvonalon vannak.
Mivel $PR = P'R$ a tükrözés miatt, a P' pontok a PQ átmérőjű körnek a P pontból történő kétszeresére való nagyításán lesznek. A keresett ponthalmaz tehát a Q középpontú PQ sugarú körvonal.
A körvonal minden pontját megkapjuk, hiszen minden P' ponthoz megadható az egyenes, amelyre tükrözni kell: a $P'P$ felezőpontját Q-val összekötő egyenes.



A tanárképző főiskolák 2004. évi Péter Rózsa Matematikaversenyének feladatai

1. Legyen $A = 1\underbrace{77\ldots7}_{2k+1 \text{ db}}6$ $2k+3$ jegyű és $B = 1\underbrace{55\ldots5}_{k \text{ db}}6$ $k+2$ jegyű természetes szám.
Bizonyítsa be, hogy $\sqrt{A-B}$ is természetes szám, és határozza meg jegyeinek számát!

2. Jelölje T az ABC háromszög M magasságpontjainak a C csúcsból induló súlyvonalra eső merőleges vetületét. Bizonyítsa be, hogy T-nek az AB oldal felezőpontjára vonatkozó tükörképe az ABC háromszög köré írt körön van!

3. Az (a_n) sorozatot a következőképpen adtuk meg:

$$a_1 = 1,$$

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_{n+1} + a_n}, \quad \text{ha } n \geq 1.$$

Adja meg a_n-et n függvényeként!

4. Igazolja, hogy ha egy háromszög α és β szögére $\sin\alpha \neq \cos\beta$ és teljesül, hogy

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta - \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\beta},$$

akkor a háromszög egyenlőszárú.

5. Melyik az a legkisebb, 1-nél nagyobb n egész szám, amelyre igaz, hogy bárhogyan is helyezünk el n pontot az egységsugarú kör belsejében, mindig van a pontok közt 2 olyan, amelyek távolsága kisebb, mint $\sqrt{2}$?

6. 8 versenyző körmérkőzést játszik (mindenki pontosan egyszer játszik mindenkivel). Döntetlen nincs. Bizonyítsa be, hogy mindig kiválasztható 4 olyan versenyző, akik közül az első legyőzte a másodikat, harmadikat és negyediket, a második legyőzte a harmadikat és negyediket, valamint a harmadik is legyőzte a negyediket!

7. Adott egy háromszög. Igazolja, hogy ha a háromszög nem szabályos, akkor van olyan, vele nem egybevágó egyenlőszárú háromszög, amelynek ugyanakkora a kerülete és a területe!

ERICSSON-DÍJ 2004
Felhívás díjazandó tanárok ajánlására
Beadási határidő: 2004. július 15.

Az Ericsson cég magyarországi Kutatás-Fejlesztési Igazgatósága által alapított díjat **általános és középiskolai fizika- és matematikatanárok** nyerhetik el, az alább részletezett feltételek szerint. A díj alapításának célja hogy támogassa és erősítse a magyarországi matematikai és természettudományos alapképzés világviszonylatban is kiemelkedő színvonalát, igényességét. Ennek köszönhető ugyanis, hogy a hazai műszaki és természettudományi diplomával rendelkezők tudása megfelelő szellemi értéket képvisel az igényes hazai és külföldi befektetők előtt és vonzóvá teszi Magyarország bekapcsolását a távközlés és egyéb csúcstechnológiák nemzetközi kutatási fejlesztési láncába.

Az ERICSSON-DÍJAKAT 2004-ben két kategóriában ítélik oda:

1. „Ericsson a matematika és fizika népszerűsítéséért" díj

4 matematika- és 4 fizikatanár részére egyenként 200 000 Ft-tal járó díj, melyet olyan tanárok kaphatnak, akik tanítványaikkal aktívan bekapcsolódtak a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok vagy az ABACUS folyóiratának pontversenyeibe, vagy a tanítás mellett évek óta a legtöbbet teszik a tantárgyuk iránti érdeklődés felkeltéséért és megszerettetéséért.

2. „Ericsson a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért" díj

2 matematika- és 2 fizikatanár részére egyenként 200 000 Ft-tal járó díj, melyet olyan tanárok kaphatnak, akiknek tanítványai a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok versenyein, vagy a Varga Tamás, Kalmár László, Arany Dániel matematikaversenyek, matematika vagy fizika OKTV, Öveges József, Mikola Sándor, Szilárd Leó fizikaversenyek, a Nemzetközi Matematika vagy Fizika Diákolimpiák, a Kürschák József matematikai tanulóversenyek vagy az Eötvös Loránd fizikaversenyek valamelyikén az 1999–2000-es tanévtől kezdődően első, második, vagy harmadik díjat nyertek.

A díjakat a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány ítéli oda, a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Ericsson-díjbizottságainak ajánlása alapján. A díjazandókra írásos javaslatot nyújthatnak be szakmai és társadalmi szervezetek, a javasolt tanár tevékenységét ismerő kollégák, tanítványok. **Az ajánlásnak tartalmaznia kell a javasolt személy részletes szakmai jellemzését** különös tekintettel azokra a szempontokra, amelyek alapján a díjra érdemesnek tartják. Ha a korábbi években már javasolt tanár nem kapott díjat, a felterjesztést (hivatkozva a már beküldött jellemzésre, esetleg kiegészítve azt) kérjük, ismételjék meg! A beadási határidő: **2004. július 15.** Cím: Bolyai János Matematikai Társulat vagy Eötvös Loránd Fizikai Társulat, 1027 Budapest, Fő u. 68.

A bizottságok a benyújtott írásos javaslatok alapján 2004. szept. 15-ig döntést hoznak a jelöltek sorrendjéről. A bizottságok részletes indoklását tartalmazó jelentése után a MATFUND kuratóriuma 2004. szept. 25-ig dönt a díjazandók személyéről.

PÁLYÁZATI FELHÍVÁS
Rátz Tanár Úr Életműdíj - 2004
Matematika-, fizika-, kémiatanárok elismerésére

Az Ericsson Magyarország Kft., a Graphisoft Rt. és a Richter Gedeon Rt. közös díjat alapított tanároknak, melyet a Fasori Gimnázium legendás hírű matematikatanáráról „RÁTZ TANÁR ÚR ÉLETMŰDÍJ"-nak nevezett el. E díj gondozására létrejött Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért a jelöltenként 1 000 000 forinttal járó elismerést minden évben két-két matematika-, fizika- és kémiatanárnak ítéli oda.

A díjra a közoktatás 5-12. évfolyamain matematikát és/vagy fizikát és/vagy kémiát tanító (vagy egykor tanító) aktív tanárok terjeszthetők fel írásban szakmai és társadalmi szervezetek, az ajánlott tanár tevékenységét jól ismerő kollektívák által.

A felterjesztés feltétele, hogy a jelölt a közoktatás területén – nem szervezői munkakörben – dolgozó, az 5-12. évfolyamokon több éven át kimagasló oktató-nevelő tevékenységet végző/végzett olyan tanár legyen,

- aki a fenti tantárgyak közül legalább az egyiket több éven át eredményesen tanította, tanítványai a középiskolában és/vagy a felsőfokú intézményekben sikerrel állják/állták meg a helyüket,
- akinek tanítványai az országos hazai és/vagy nemzetközi versenyeken a fenti tantárgyak valamelyikében az elsők között szerepeltek vagy többször a döntőbe jutottak,
- aki tevékenységében gondot fordít a hátrányos helyzetű, tehetséges diákok felfedezésére, tudásuk gyarapítására,
- aki jelentős szerepet vállal a fenti három tantárgy valamelyikéhez kapcsolódó országos, regionális vagy iskolai szakmai programok (pl. versenyek, továbbképzések, tanácskozások) megszervezésében, a program tartalmának felépítésében és kivitelezésében (pl. előadások tartása, szakanyagok készítése, friss információ továbbítása),
- aki rendszeresen továbbképzi magát, tájékozott az adott tudomány területén elért eredményekről, a tantárgy tanításával kapcsolatos aktualitásokról, tapasztalatait megosztja kollégáival,
- szakmai lapokban publikál, könyveket, tankönyveket, tanítási segédleteket írt vagy ír,
- aki a szaktárgyi felkészítés mellett hivatásának tekinti tanítványai nevelését, személyiségük fejlesztését, problémáik megoldásához segítséget nyújt,
- akinek személyisége, szakértelme, egész életvitele példamutató.

A díjakat a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat díjbizottságai, valamint a Magyar Kémikusok Egyesülete ajánlásai alapján a három cég által felkért Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért Kuratóriuma – melynek elnöke Dr. Kroó Norbert, a Magyar Tudományos Akadémia főtitkára – ítéli oda az adott év kitüntetettjeinek.

A három tudományos társaság a beérkezett ajánlásokat a fenti feltételek szellemében értékeli, s ennek alapján teszi meg javaslatait a díjazottakra 2004. október 8-ig. Ezen javaslatok alapján hozza meg döntését az Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért Kuratóriuma 2004. október 25-ig. A díj átadására 2004. novemberében kerül sor.

Az írásos felterjesztéseket legkésőbb **2004. szeptember 13-ig** kérjük eljuttatni – illetékesség szerint – a Bolyai János Matematikai Társulathoz vagy az Eötvös Loránd Fizikai Társulathoz (mindkettő címe 1027 Budapest, Fő utca 68.), illetve a Richter Gedeon Alapítvány a Magyar Kémia Oktatásáért (1475 Budapest 10, Pf. 27.) címére. A borítékra jól láthatóan írják rá, hogy „Rátz Tanár Úr Életműdíj". Az elmúlt év felterjesztéseit – ha azt továbbra is fenntartják a javaslattevők – ismételten írásban kell megerősíteni!

Alapítvány a Magyar
Természettudományos Oktatásért Kuratóriuma

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2004. augusztus 31.

Feladatok (250-254)

250. Mely pozitív egész m és n esetén lesz egy egész szám négyzete a $3^m + 3^n + 1$ kifejezés értéke?

251. Bontsuk fel a pozitív egészek halmazát tetszőleges módon két diszjunkt részhalmazra. Mutassuk meg, hogy bármely pozitív egész n esetén vannak olyan a és b pozitív egészek, amelyek mindegyike nagyobb n-nél, és az a, b, $a + b$ számok mindegyike ugyanabban a részhalmazban van.

252. A, B, P_1, ..., P_6 a sík nyolc különböző pontja úgy, hogy a P_i pontok mindegyike az AB egyenes ugyanazon oldalán van. Bizonyítsuk be, hogy ha a P_iAB háromszögek páronként hasonlók akkor a P_1, ..., P_6 pontok egy körre illeszkednek.

253. Egy toronyóra nagymutatója 4 m, kismutatója 3 m hosszú. Mekkora a mutatók végpontjai közötti távolság abban a pillanatban, amikor a végpontok leggyorsabban távolodnak egymástól?

254. Adott a síkon n pont ($n \geq 2$). Legyen d a legkisebb, D a legnagyobb a pontpárok által meghatározott távolságok közül. Igazoljuk, hogy

$$D > \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\sqrt{n} - 1\right) \cdot d .$$

Feladatmegoldások (235-239. feladatok)

235. Határozzuk meg a p valós paraméter értékét az

$$x^3 - px^2 + 54x - (5p + 7) = 0$$

egyenletben, ha tudjuk, hogy az egyenlet gyökei pozitív egészek, és az egyik gyök a másik kettő harmonikus közepe!

Fitos László, Esztergom

Megoldás: Az egyenlet gyökei a feltételeknek megfelelően az a, b és $\frac{2ab}{a+b}$ pozitív egész számok. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alkalmazásával a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\frac{2a^2b^2}{a+b} = 5p + 7 \qquad (1)$$

$$3ab = 54 \qquad (2)$$

$$a + b + \frac{2ab}{a+b} = p \qquad (3)$$

(1)-ből és (2)-ből $a + b = \frac{648}{5p+7}$. Ezt és az $ab = 18$ egyenletet (3)-ba beírva, majd rendezve p-re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$65p^2 + 56p - 11713 = 0.$$

A megoldások: $p_1 = 13$ és $p_2 = -\frac{901}{65}$. Ezek közül csak az első szolgáltat a feltételeknek megfelelő megoldást. Ekkor $a = 3$, $b = 6$, $\frac{2ab}{a+b} = 4$.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 10.

236. Mutassuk meg, hogy az $x^2 = y^3 + z^5$ egyenletnek végtelen sok pozitív egész megoldása van!

Megoldás: Könnyen látható, hogy ha n pozitív egész szám, akkor az $x = 3n^{15}$, $y = 2n^{10}$, $z = n^6$ számhármas megoldása az egyenletnek, ez pedig végtelen sok megoldást jelent.

Több megoldás alapján

Megjegyzés: Ha $x = a$, $y = b$, $z = c$ megoldása az egyenletnek, akkor az $x = an^{15}$, $y = bn^{10}$, $z = cn^6$ is megoldás bármely pozitív egész n esetén. A fenti megoldásokon kívül végtelen sok megoldást kapunk, ha pl. az $a = 192$, $b = 16$, $c = 8$ alapmegoldásból indulunk ki.

Szoldatics József, Kapuvár

A megoldók száma: 9.

237. Az ABC háromszög súlypontja S. Jelölje a CAS szöget α, a CBS szöget β. Mutassuk meg, hogy ha az ASC háromszög körülírt köre érinti az AB egyenest, akkor

$$\sin\alpha + \sin\beta \le \frac{2}{\sqrt{3}}!$$

Megoldás: Jelölje rendre A', B', C' a BC, AC, AB oldalak felezőpontját. Az ASC háromszög köré írható körre nézve a C' pontból húzható érintő és szelő szakaszokra érvényes a $C'A^2 = C'S \cdot C'C$ összefüggés, amit a szokásos jelölésekkel $\frac{c^2}{4} = \frac{s_c^2}{3}$ alakban is írhatunk. Felhasználva a súlyvonal hosszára vonatkozó $s_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$ összefüggést, előző egyenlőségünk

$$a^2 + b^2 = 2c^2 \qquad (1)$$

alakban írható. (1) figyelembe vételével a súlyvonalak hossza az oldalhosszak függvényében:

$$s_a = \frac{\sqrt{3}}{2}b,\ s_b = \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ s_c = \frac{\sqrt{3}}{2}c. \qquad (2)$$

Ha r_A, illetve r_B jelöli az ACS, illetve BCS háromszögek körülírt körének sugarát, akkor $\sin\alpha = \frac{SC}{2r_A}$, $\sin\beta = \frac{SC}{2r_B}$, vagy más alakban

$$\sin\alpha = \frac{s_c}{3r_A},\ \sin\beta = \frac{s_c}{3r_B}. \qquad (3)$$

Az ACS, illetve BCS háromszögek körülírt körének sugarát megadhatjuk a terület és az oldalhosszak segítségével is:

$$r_A = \frac{SA \cdot SC \cdot AC}{4T_{ACS}} = \frac{s_a s_c b}{3T},$$

illetve

$$r_B = \frac{s_b s_c a}{3T}, \qquad (4)$$

ahol T az ABC háromszög területét jelöli. (2), (3) és (4) alapján

$$\sin\alpha = \frac{2T}{\sqrt{3}b^2},\ \sin\beta = \frac{2T}{\sqrt{3}a^2}. \qquad (5)$$

Ha γ jelöli az ACB szöget, akkor a koszinusztétel szerint $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, amelyből (1) alapján

$$c^2 = 2ab\cos\gamma. \qquad (6)$$

(1), (5) és (6), valamint a háromszög jól ismert területképlete alapján

$$\sin\alpha + \sin\beta = \frac{ab\sin\gamma}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) =$$

$$= \frac{\sin\gamma}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2c^2}{ab} = \frac{2\sin 2\gamma}{\sqrt{3}} \le \frac{2}{\sqrt{3}},$$

amit bizonyítani kellett.

Megjegyzés: Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $\gamma = 45°$. Végtelen sok olyan háromszög létezik, amely eleget tesz a feladat követelményeinek és a $\gamma = 45°$ feltételnek is. Egy ilyen háromszög úgy szerkeszthető, hogy egy c oldalú négyzet körülírt körét metsszük egy olyan körrel, amelynek középpontja a négyzet egyik oldalának felezőpontja, sugara pedig $\frac{c\sqrt{3}}{2}$, a c oldalú szabályos háromszög magassága. A kapott metszéspontok egyike és a négyzet azon oldala, amelynek felezőpontját kör középpontként választottuk, a kívánt tulajdonságú háromszöget határozza meg.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 7.

238. Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}$ sor összege irracionális szám!

Megoldás: A sor szigorúan nő. Érvényesek a következő becslések:

$$1<1+\frac{1}{4}=\frac{1}{(1!)^2}+\frac{1}{(2!)^2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}<$$

$$<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}<2\,.$$

Adódik, hogy a sor összege nem egész szám.

Ad abszurdum tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}$ racionális szám, azaz léteznek olyan p és q relatív prím pozitív egészek, amelyekre $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}=\frac{p}{q}$, és $q>1$ (láttuk, hogy a sorösszeg nem egész szám).

$$\frac{1}{(1!)^2}+\frac{1}{(2!)^2}+\ldots+\frac{1}{(q!)^2}+\frac{1}{((q+1)!)^2}+\ldots=\frac{p}{q}$$

Szorozzuk meg a fenti egyenletet $(q!)^2$-nel.

$$(q!)^2\cdot\left(\frac{1}{(1!)^2}+\frac{1}{(2!)^2}+\ldots+\frac{1}{(q!)^2}\right)+$$

$$+(q!)^2\cdot\left(\frac{1}{((q+1)!)^2}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{p\cdot(q!)^2}{q}=p\cdot q!\cdot(q-1)!$$

A jobb oldalon egész szám áll, és a bal oldal első tagja is egész. Ebből adódóan a bal oldal második tagjának is egésznek kellene lennie. Becsüljük meg ezt a második tagot.

$$0<(q!)^2\left(\frac{1}{((q+1)!)^2}+\frac{1}{((q+2)!)^2}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^2(q+2)^2}+\ldots<$$

$$<\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^4}+\ldots=\frac{1}{(q+1)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{(q+1)^2}}=$$

$$=\frac{1}{(q+1)^2-1}=\frac{1}{q^2+2q}<\frac{1}{2q}<1$$

Ellentmondásra jutottunk, ugyanis a bal oldal második tagja biztosan nem egész szám.
Ezzel beláttuk, hogy a tekintett sorösszeg valóban irracionális.

Szoldatics József, Kapuvár

A megoldók száma: 8.

239. Valamely pozitív egész n esetén jelölje $p(n)$ azt a legnagyobb nem negatív egész k számot, amelyre 2^k osztója n-nek. Rekurzív módon definiáljuk a következő számokat: $x_0=\frac{1}{2003}$, és ha $x_{n-1}\neq 1+2p(n)$, akkor $x_n=\frac{1}{1+2p(n)-x_{n-1}}$. Hány szám definiálható a leírt módon?

Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás: A fenti módon $2^{2003}-1$ szám definiálható.
A $p(n)$ függvény néhány könnyen igazolható tulajdonsága:
(1) $p(n)=0$ minden páratlan n esetén.
(2) $p(2^k\cdot n)=k+p(n)$ bármely nem negatív egész k, és pozitív egész n esetén.
(3) $p(2^k\pm n)=p(n)$, ha k és n olyan pozitív egészek, amelyekre $0<n<2^k$.
A vizsgálandó $\{x_n\}$ sorozat helyett vizsgáljuk az $y_1=1$, $y_n=1+2p(n)-\frac{1}{y_{n-1}}$ $(n\geq 2)$ rekurzióval definiált $\{y_n\}$ sorozatot. Előbb igazoljuk ennek a sorozatnak néhány tulajdonságát.

1. állítás: $y_{2n}=y_n+1$ bármely pozitív egész n esetén.

Bizonyítás: Teljes indukciót alkalmazunk.
Mivel $y_2=2$, ezért $n=1$ esetén igaz az állítás.
Tegyük fel, hogy igaz valamely pozitív egész n-re.

$$y_{2n+2}=1+2p(2(n+1))-\frac{1}{y_{2n+1}}$$

(1), (2), valamint a rekurzió és az indukciós feltevés alkalmazásával kapjuk, hogy

$$y_{2n+2} = 3 + 2p(n+1) - \frac{1}{1 - \frac{1}{y_{2n}}} =$$

$$= 3 + 2p(n+1) - \frac{y_{2n}}{y_{2n} - 1} =$$

$$= 3 + 2p(n+1) - \frac{y_n + 1}{y_n} = 2 + 2p(n+1) - \frac{1}{y_n}.$$

Mivel $y_{n+1} = 1 + 2p(n+1) - \frac{1}{y_n}$, ezért valóban $y_{2n+2} = y_{n+1} + 1$.

Következmény: $y_{2^k} = k + 1$ és $y_{2^k - 1} = \frac{1}{k}$.

2. állítás: Az $\{y_n\}$ sorozat minden tagja pozitív.

Bizonyítás: Most is teljes indukcióval dolgozunk. y_1 pozitív, és tegyük fel, hogy minden $k < n$ esetén y_k pozitív. Két eset lehetséges:

1. n páros. Ekkor $y_n = y_{\frac{n}{2}} + 1$, ezért az indukciós feltevés miatt y_n pozitív.
2. n páratlan. Ha $n = 2l + 1$, akkor (1), az 1. állítás és az indukciós feltevés miatt $y_{2l+1} = 1 - \frac{1}{y_{2l}} = 1 - \frac{1}{y_l + 1} > 0$.

Ezzel beláttuk a 2. állítást.

3. állítás: Ha $x_0 = \frac{1}{k}$, $x_n = \frac{1}{1 + 2p(n) - x_{n-1}}$ ($n \in \mathbb{N}^+$), akkor $y_{2^k - (n+1)} = x_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots, 2^k - 2$).

Bizonyítás: Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $n = 0$, akkor az 1. állítás következménye miatt $y_{2^k - 1} = \frac{1}{k} = x_0$.

Tegyük fel, hogy valamely megengedett n-re igaz az állítás, és vizsgáljuk $n + 1$ esetére. A rekurzió szerint

$$y_{2^k - (n+1)} = 1 + 2p(2^k - (n+1)) - \frac{1}{y_{2^k - (n+2)}},$$

ami átrendezve

$$y_{2^k - (n+2)} = \frac{1}{1 + 2p(2^k - (n+1)) - y_{2^k - (n+1)}}.$$

Az indukciós feltevést és (3)-at felhasználva

$$y_{2^k - (n+2)} = \frac{1}{1 + 2p(n+1) - x_n} = x_{n+1}.$$

Ezzel beláttuk a 3. állítást. Ezen utóbbi állítás alapján $x_{2^k - 2} = y_1 = 1$ még értelmezhető, de $x_{2^k - 1} = \frac{1}{1 + 2p(2^k - 1) - x_{2^k - 2}}$ már nem értelmezhető.

A 2. és a 3. állítás miatt az $\{x_n\}$ sorozat tagjai $n = 0, 1, 2, \ldots, 2^k - 2$ esetén pozitív számok, így az $\{x_n\}$ sorozatnak pontosan $2^k - 1$ tagja értelmezhető. Az eredeti feladat kérdésére $k = 2003$ esetén kapjuk a választ.

Rakonczai György, Budapest

A megoldók száma: 3.

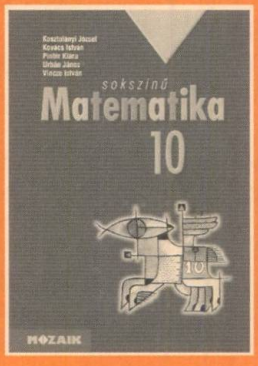
A megoldók névsora: Csorba Ferenc, Győr (235-237.); Dályay Pál Péter, Szeged (235-239.); Kamarás Lajos, Pécs (235-238.); Kiss Zoltán, Pécs (235-238.); Nagy Béla, Sarkad (235., 236., 238.); Rakonczai György, Budapest (235-239.); Szoldatics József, Kapuvár (235-238.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (235., 236., 238.); Varga Éva, Kecskemét (235.); Zachar Zoltán, Tatabánya (235-239.).

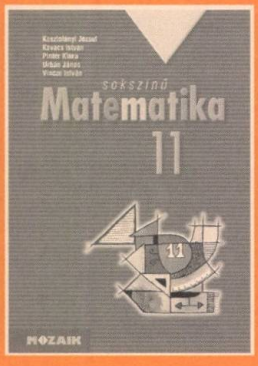
AJÁNLOTT TANTERV

A közoktatásról szóló törvény szerint 2004-ben az iskolák új pedagógiai programot, illetve a NAT 2003 alapján helyi tantervet készítenek. Az iskola az oktatási miniszter által kihirdetett kerettantervek alapján is elkészítheti helyi tantervét. A Mozaik Kiadónak az OM által kiírt pályázatra benyújtott kerettanterv-rendszerét az Országos Köznevelési Tanács ajánlott tantervként kihirdetésre javasolta. A tanterv letölthető a kiadó honlapjáról a www.mozaik.info.hu címről, CD-n megrendelhető (6701 Szeged, Pf. 301. vagy rendeles@mozaik.info.hu), illetve megjelenik a kerettantervek kiadásáról szóló miniszteri rendelet mellékleteként, s hozzáférhető az OM honlapján is.

MOZAIK – NAT 2003
Kerettantervrendszer
www.mozaik.info.hu

MATEMATIKAKÖNYVEK A SIKERES FELVÉTELI VIZSGÁHOZ





MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

SZOLNOKI SZÉCHENYI KÖNYVTÁR

Mi köze van a szabályos háromszögnek a szabályos ötszöghöz?

(Ringler András)

Speciális pitagoraszi számhármasok és számnégyesek

(Fitos László)

Aranymetszés és Fibonacci-sorozat

(Csorba Ferenc)

Jelentés a 2004. évi Beke Manó-emlékdíjak odaítéléséről

XII. ÉVFOLYAM 2004 4

MOZAIK

www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó:
Török Zoltán
Tördelőszerkesztő:
Kovács Attila
Borítóterv:
Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj:
1350 Ft
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltban:
Budapest VIII., Üllői út 70.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Mi köze van a szabályos háromszögnek a szabályos ötszöghöz?
Ringler András
egyetemi docens, Szeged

Új bizonyítás a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-féle egyenlőtlenségre a komáromi trükkel
Csete Lajos
tanár, Markotabödöge

Jelentés a 2004. évi Beke Manó-emlékdíjak odaítéléséről

Speciális pitagoraszi számhármasok és számnégyesek
Fitos László
főiskolai docens, Esztergom

Aranymetszés és Fibonacci-sorozat
Csorba Ferenc
tanár, Győr

A XXXIII. Országos Kalmár László Matematikaverseny döntőjéről
Urbán János
tanár, Budapest

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Ringler András

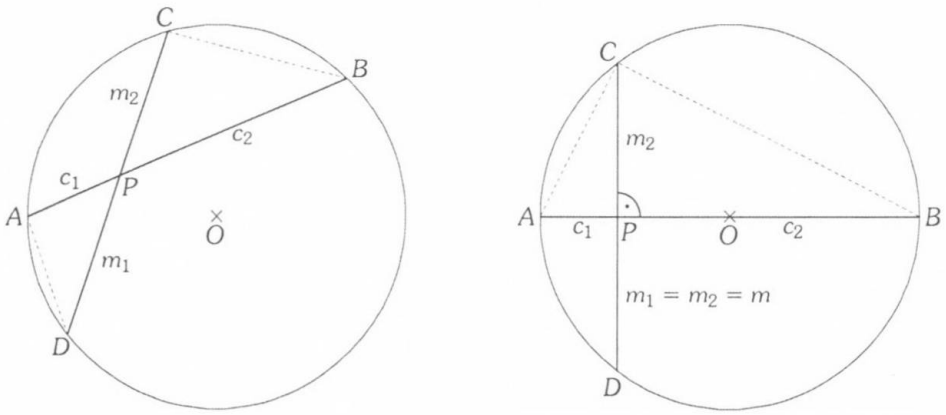
Mi köze van a szabályos háromszögnek a szabályos ötszöghöz?

Dolgozatomban azt mutatom meg, hogy kiindulva egy szabályos háromszögből, olyan adatokhoz juthatunk, amelyek segítségével egy szabályos ötszög körzővel és vonalzóval könnyedén megszerkeszthető.

A derékszögű háromszögekkel kapcsolatosan gyakran használt magasságtételt szinte mindenki ismeri. Azt azonban már kevesebben tudják, hogy ez a tétel egy általánosabb tételnek, a szelőszakaszok tételének csupán egy speciális esete. Könnyű megmutatni, hogy ezen állítások hátterében a kör tulajdonsága, „a kör egyenlete áll".

Egy körben két egymást metsző AB és CD szelőszakasz (két húr) közös pontja legyen P. Az 1. ábra bal oldali részét nézve könnyű belátni, hogy az $ADP\triangle$ hasonló a $PBC\triangle$-höz, $\Rightarrow \frac{c_1}{m_1} = \frac{m_2}{c_2}$, $\Rightarrow c_1 \cdot c_2 = m_1 \cdot m_2$; és ez minden, a P ponton átmenő szelőszakaszra igaz. Ha az AB szelőszakasz (speciális esetként) átmegy a kör középpontján (vagyis, ha az AB húr éppen átmérő, lásd az 1. ábra jobb oldali részét) és a CD szelőszakasz merőleges az AB szelőszakaszra, akkor az ABC háromszög derékszögű háromszög lesz, ekkor $m_1 = m_2 (\equiv m)$ miatt $c_1 \cdot c_2 = m^2$. Ez utóbbi éppen a magasságtétel, amely szerint a derékszögű háromszög átfogójához tartozó m magasság mértani közepe az átfogó megfelelő két részének.

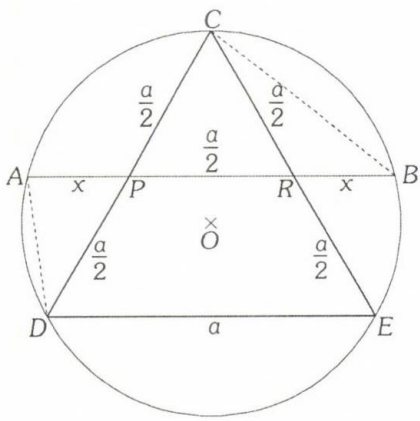
A szelőszakaszok tételének ismerete hasznos dolog, segítségével válaszolhatunk a címben feltett kérdésre: mi köze van a szabályos háromszögnek a szabályos ötszöghöz? A kérdés megválaszolásához egy körbe rajzolt egyenlő oldalú DEC háromszög CD és CE oldalainak P és R felezőpontjaira húzott középvonal körrel közös pontjait jelölje A és B (lásd a 2. ábrát!). Az AB és CD húrok megfelelő ($AP = RB = x$, $PB = \frac{a}{2} + x$, $CP = PD = \frac{a}{2}$) részeivel írjuk fel az előbb bevezetett szelőszakaszok tételét, így



1. ábra

A kör két tetszőleges húrja a P pontban metszi egymást. A jobb oldalon speciális eset: az egyik húr a kör átmérője, a másik húr (a CD húr) pedig merőleges az AB átmérőre

$\frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}+x} \Rightarrow \left(\frac{a}{2}+x\right)\cdot x = \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Ez az összefüggés azt mondja, hogy az $\frac{a}{2}$ távolság mértani közepe az $\frac{a}{2}+x$ és az x távolságoknak, amelyből az $\frac{a}{2}\cdot x + x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ hiperbolikus egyenlethez jutunk. Mai ismeretekkel könnyű rájönni arra, hogy ezen egyenlet algebrai megoldásával $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{a}{2}$ és $x_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{a}{2}$ adódik. Ez a tény roppant érdekes, hiszen arról tájékoztat, hogy az x és az $\frac{a}{2}$ távolságok (vagy a $2x$ és az a távolságok) aranyarányban vannak egymással; az ilyen tulajdonságú távolságokat aranyszomszédoknak nevezem. Tudjuk, hogy a szabályos ötszög körzővel és vonalzóval történő megszerkesztéséhez aranyszomszédokra van szükség, ezek segítségével ugyanis a 72°-os szög, a szabályos ötszög középponti szöge megszerkeszthető. A görögök idején az $\frac{a}{2}\cdot x + x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ alakú (hiperbolikus) egyenleteket még nem algebrailag, hanem geometriailag, tehát körzővel és vonalzóval oldották meg; de mivel a görögök a negatív számokat nem ismerték, ezért a negatív megoldás nem is érdekelhette őket. A görögök által használt, a mára már elfelejtett geometriai módszer nagyon érdekes, felidézésével, pontosabban az újra történő felfedezésével – a megoldó képlet használata, tehát algebrai ismeretek nélkül – mutatom meg, hogy hogyan jöhetünk rá, hogy mi köze a fenti szabályos háromszögnek a szabályos ötszöghöz: a 2. ábrán olyan adatok vannak, amelyek segítségével szabályos ötszöget, például szabályos ötágú csillagot tudunk szerkeszteni. A 2. ábra másik érdekessége, hogy az AB húr hossza megegyezik a 3. ábrán látható derékszögű háromszög átfogójának a hosszával (ennek jelentőségét lásd később!).



2. ábra
A szabályos háromszöget szemléltető ábra érdekessége, hogy az x és az $\frac{a}{2}$ távolságok (vagy a 2x és az a távolságok) aranyarányban vannak egymással. Aranyszomszédok ismeretében a szabályos ötszög, például a pitagóreusok titkos szimbóluma, a szabályos ötágú csillag könnyedén megszerkeszthető (lásd a 4. ábra jobb oldali részét!)

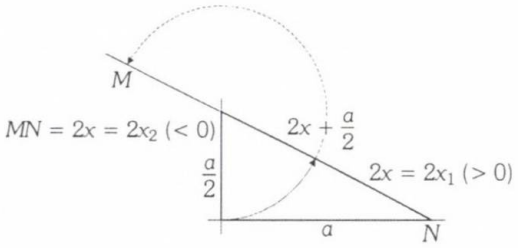
Az $\frac{a}{2}\cdot x + x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ alakban adott hiperbolikus egyenlet geometriai megoldhatósága felismeréséhez, egy „elfelejtett módszer" felidézéséhez, illetve az újból történő felfedezéséhez szorozzuk meg az $\frac{a}{2}\cdot x + x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ alakú hiperbolikus egyenletet 4-gyel; $\Rightarrow 2ax + 4x^2 = a^2$, $\Rightarrow 2x(2x+a) = a^2$, $\Rightarrow$

$$\left(2x+\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\right)\cdot\left(2x+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right) = a^2, \Rightarrow$$

$$\left(2x+\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2, \Rightarrow \left(2x+\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

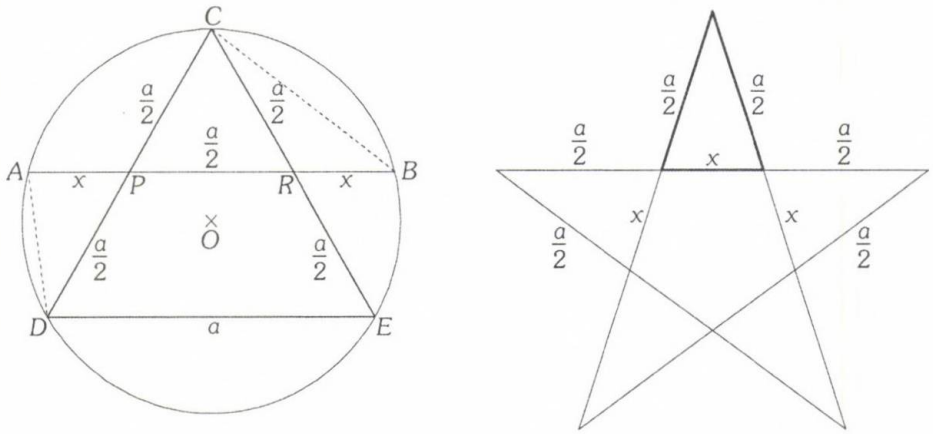
Ez a kifejezés roppant érdekes, ez nem más, mint egy derékszögű háromszögre felírt Pythagorasz-tétel (lásd a 3. ábrát!). Az a és az $\frac{a}{2}$ távolságok, mint befogók ismeretében megszerkesztett derékszögű háromszög $2x+\frac{a}{2}$ hosszúságú átfogója tartalmazza a keresett x távolság kétszeresét, a $2x$-et, amelynek megfelezésével előáll a keresett x távolság. A szerkesztésből lát-

szik, hogy az $\frac{a}{2}\cdot x + x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ alakú egyenlet megoldhatóságának, a derékszögű háromszög megszerkeszthetőségének nincsen semmilyen geometriai akadálya (a 3. ábrán látható derékszögű háromszög minden a távolság esetén megszerkeszthető); az ilyen alakú egyenletek algebrai megoldásánál a diszkrimináns értéke mindig pozitív, tehát két gyököt, egy pozitív és egy negatív gyököt várunk (bár a negatív gyököt szigorú görög mestereink nem találták meg, hiszen nem is keresték). Ha a $2x + \frac{a}{2}$ távolságot pozitív előjelű távolságnak vesszük, akkor az $\frac{a}{2}$ távolság levonó átkörzésével előáll a pozitív megoldás kétszerese, a $2x_1$ távolság, (ezt a gyököt szigorú görög mestereink is megtalálták). Ha a $2x + \frac{a}{2}$ távolságot negatív előjelű távolságnak tekintjük, akkor az $\frac{a}{2}$ távolság hozzáfűző átkörzésével $\left(-\left(2x + \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2} = -2x\right)$ előáll a negatív megoldás kétszerese, a $2x_2$ távolság, az ábrán az MN távolság. Konkrét adatokkal: ha a derékszögű háromszög két befogója a és $\frac{a}{2}$, akkor az átfogó értéke $\sqrt{5}\cdot\frac{a}{2}$ $\left(\equiv 2x + \frac{a}{2}\right)$; ebből levonva az $\frac{a}{2}$-t, akkor a maradék $2x$-ből $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{a}{2}$ adódik. Ez az összefüggés – tisztán geometriai meggondolásokból adódóan – azt mutatja, hogy az x és az $\frac{a}{2}$ távolságok (vagy a $2x$ és az a távolságok) aranyarányban vannak egymással; x alsó aranyszomszédja az $\frac{a}{2}$ távolságnak, (vagy $2x$ alsó aranyszomszédja az a távolságnak). Ez azt jelenti, hogy az x és az $\frac{a}{2}$ távolságok ismeretében a szabályos ötszög, például a szabályos ötágú csillag, körzővel és vonalzóval megszerkeszthető. Ha az átfogó számértéke $\sqrt{5}\cdot\frac{a}{2}$ $\left(\equiv -\left(2x + \frac{a}{2}\right)\right)$, akkor ehhez $\frac{a}{2}$-t adva, a negatív $2x$-ből $x_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{a}{2}$ adódik. Ez az összefüggés is azt mutatja, hogy az x és az $\frac{a}{2}$ távolságok aranyarányban vannak egymással, x felső aranyszomszédja az $\frac{a}{2}$ távolságnak, (vagy a $2x$ felső aranyszomszédja az a távolságnak). Aranyarányban lévő távolságok ismeretében a pitagóreusok titkos szimbóluma, a szabályos ötágú csillag – körzővel és vonalzóval – könnyedén megszerkeszthető. A 3. ábra érdekessége, hogy a szerkesztéssel kapott derékszögű háromszög átfogójának a hossza megegyezik a 2. ábrán lévő AB húr hosszával: ez azt jelenti, hogy egy szabályos háromszög felhasználásával elkészítve a 2. ábrát olyan adatokhoz juthatunk, amelyek segítségével szabályos ötszöget szerkeszthetünk (lásd a 4. ábra jobb oldali részét!).



3. ábra

Az $\frac{a}{2}\cdot x + x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ hiperbolikus egyenlet geometriai megoldásának vázlata; az a és az $\frac{a}{2}$ távolságok (a befogók) ismeretében a derékszögű háromszög megszerkeszthető, így a keresett x távolságot, egyenletünk gyökeit az $\frac{a}{2}$ hosszúságú befogó átfogóra történő kétszeri átkörzésével; levonó- és hozzáfűző elmetszésével kapott $2x_1$ és $2x_2$ távolságok megfelezésével kapjuk meg



4. ábra

Az ábra bal oldali részén előállított x és $\frac{a}{2}$ távolságok segítségével a szabályos ötágú csillag (vagy a szabályos ötszög) körzővel és vonalzóval megszerkeszthető: „az ábra jobb oldali része önmagáért beszél"

A másodfokú egyenletek körzővel és vonalzóval történő megoldása roppant tanulságos dolog és számos érdekes következtetésre vezet (bővebben lásd [1]-et!). A most bemutatott speciális eset kapcsán bízom abban, hogy a leírtak alapján könnyen érthető dolgozatom furcsa címe, „kiindulva egy szabályos háromszögből, a 2. ábrán előállított x és $\frac{a}{2}$ távolságok segítségével könnyedén tudunk szabályos ötszöget szerkeszteni" (lásd a 4. ábra jobb oldali részét, az ábra önmagáért beszél).

Irodalom

[1] Ringler András: Gondolkozzunk görögül, A matematika tanítása, XI. évfolyam, 5. szám, 3–8. o., Mozaik Kiadó, Szeged, 2003.

Csete Lajos

Új bizonyítás a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenségre a komáromi trükkel

1. A Cauchy-féle egyenlőtlenség

Ismert a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenség, amely valójában Cauchy-féle egyenlőtlenség:

Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tetszőleges valós számok, akkor igaz a következő egyenlőtlenség

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq$$
$$\leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2},$$

ha a b_i-k nem mind nullák, az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan $\lambda \neq 0$ valós szám, hogy $a_1 = \lambda \cdot b_1$, $a_2 = \lambda \cdot b_2$, ..., $a_n = \lambda \cdot b_n$.

Ezen egyenlőtlenséget Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) francia matematikus találta és tette először közzé egy 1821-ben kiadott könyvében. Bunyakovszkijnak és Schwarznak későbbi érdemei vannak az integrálokra való általánosítással kapcsolatban. (Cauchy, A.: *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique I., Analyse algébrique*, Paris, 1821.)

2. Egy segédtétel igazolása a komáromi trükkel (ismétlés)

Egy korábbi [4] cikkben szerepel a következő bizonyítás:

1. Segédtétel:

Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitív valós számok és $y_1, y_2, \ldots, y_n$ az előző számok egy tetszőleges sorrendje. Igazoljuk, hogy ekkor

$$(*) \quad \frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

Az 1. segédtétel bizonyítása a komáromi trükkel:

Adjunk az $\frac{x_i^2}{y_i}$-hez y_i-t, hogy majd a mértani középnél eltűnjön az y_i.

Alkalmazzuk most a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a pozitív $\frac{x_i^2}{y_i}$ és y_i számokra, azt kapjuk, hogy:

$$\frac{\frac{x_i^2}{y_i} + y_i}{2} \geq \sqrt{\frac{x_i^2}{y_i} \cdot y_i} = \sqrt{x_i^2} = x_i$$

Azaz

$$\frac{x_i^2}{y_i} + y_i \geq 2 \cdot x_i.$$

Most ezt az egyenlőtlenséget alkalmazzuk $i = 1, 2, \ldots, n$-re, majd adjuk össze ezen egyenlőtlenségeket és azt kapjuk, hogy:

$$\left(\frac{x_1^2}{y_1} + y_1\right) + \left(\frac{x_2^2}{y_2} + y_2\right) + \ldots + \left(\frac{x_n^2}{y_n} + y_n\right) \geq$$
$$\geq 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \ldots + 2 \cdot x_n$$

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \geq$$
$$\geq 2 \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Most vegyük figyelembe, hogy $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, hiszen az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ számok éppen az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számoknak egy sorrendje. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} + (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \geq$$
$$\geq 2 \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Vagyis valóban fennáll az

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

egyenlőtlenség.

Itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $\frac{x_i^2}{y_i} = y_i$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$ –re teljesül.

Ebből következik, hogy $x_i^2 = y_i^2$ és mivel x_i és y_i pozitív számok, ezért teljesül, hogy $x_i = y_i$.

Azt kaptuk, hogy egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn az egyenlőtlenségben, ha $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$.

Tehát a segédtételről elmondhatjuk, hogy az következik a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség $n = 2$-re való alakjából.

3. Egy sikertelen bizonyítási kísérlet

A győri Rátz László Vándorgyűlésre 2002. július elejére könnyelmű módon a következő címmel hirdettem előadást: *„A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenség egy új bizonyítása és a komáromi trükk"*. Az előadásra szerencsés módon csak délután került sor így még reggel sikerült rádöbbenni, hogy az „új bizonyítás" nem működik. Kissé kétségbeesetten próbáltam kijavítani a hibát még a délelőtt folyamán, de ez akkor nem sikerült.

Így aztán kénytelen voltam módosítani a címet a következőre: *„A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenség egy bizonyítása és a komáromi trükk"*. E témáról részletesen beszámolt a [4] cikk. Hiába biztattam a csalódott közönséget, hogy „aki csak az új bizonyításra jött, nyugodtan menjen haza, nem lesz új bizonyítás", mégis maradtak. Ezért kénytelen voltam megtartani a módosított előadást.

A hibás bizonyítási kísérlet a következő volt:

Azt kell igazolni, hogy

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq$$
$$\geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2.$$

Legyen $a_i = \frac{x_i}{\sqrt{y_i}}$ és $b_i = \sqrt{y_i}$, itt x_i és y_i pozitív számok, ahol $i = 1, 2, ..., n$.
Ezeket behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\left(\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + ... + \frac{x_n^2}{y_n}\right) \cdot (y_1 + y_2 + ... + y_n) \geq$$

$$\geq \left(\frac{x_1}{\sqrt{y_1}} \cdot \sqrt{y_1} + \frac{x_2}{\sqrt{y_2}} \cdot \sqrt{y_2} + ... + \frac{x_n}{\sqrt{y_n}} \cdot \sqrt{y_n}\right)^2 =$$

$$= (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2.$$

Vagyis elég igazolni, hogy

$$(**) \quad \frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + ... + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}{y_1 + y_2 + ... + y_n}.$$

De $x_1 + x_2 + ... + x_n = y_1 + y_2 + ... + y_n$, hiszen ezek ugyanazon számok, csak más sorrendben, ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + ... + \frac{x_n^2}{y_n} \geq x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

Ezt pedig már igazoltuk az előbb is és [4]-ben is. S mivel megfordíthatóak átalakításaink, ezért ezzel igazoltuk a Cauchy-féle egyenlőtlenséget.

A hiba ott van, hogy tetszőlegesen megadott a_i és b_i ($i = 1, 2, ..., n$) valós számok esetén nem teljesül, hogy $x_1 + x_2 + ... + x_n = y_1 + y_2 + ... + y_n$, ahol $x_i = a_i \cdot b_i$ és $y_i = b_i^2$.

4. A Cauchy-féle egyenlőtlenség új bizonyítása

2003. november 1-jén, egy szombat délután sikerült nyomra akadni, hogyan lehet kijavítani az előző hibás bizonyítási kísérletet. A hiba a (**) egyenlőtlenség után következett. Ebből azt lehet gondolni, hogy ha a (**) egyenlőtlenséget sikerülne igazolni a komáromi trükkel és (**)-ból levezetnénk a Cauchy-féle egyenlőtlenséget, akkor kapnánk egy új bizonyítást a Cauchy-féle egyenlőtlenségre.

2. Segédtétel:

Legyenek $x_1, x_2, ..., x_n$ tetszőleges valós számok és $y_1, y_2, ..., y_n$ tetszőleges pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy ekkor

$$(**) \quad \frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + ... + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}{y_1 + y_2 + ... + y_n}.$$

(Ez egy Radon-féle egyenlőtlenség speciális esete $k = 2$-re és kínai versenyfeladat is volt korábban.)

A 2. Segédtétel bizonyítása a komáromi trükkel:

Adjunk az $\frac{x_i^2}{y_i}$-hez $z \cdot y_i$-t, hogy majd a mértani középnél eltűnjön az y_i, itt z egy később megválasztott pozitív valós szám.
Alkalmazzuk most a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a pozitív $\frac{x_i^2}{y_i}$ és $z \cdot y_i$ számokra, kapjuk, hogy:

$$\frac{\frac{x_i^2}{y_i} + z \cdot y_i}{2} \geq \sqrt{\frac{x_i^2}{y_i} \cdot z \cdot y_i} = |x_i| \cdot \sqrt{z} \geq x_i \cdot \sqrt{z},$$

azaz

$$\frac{x_i^2}{y_i} + z \cdot y_i \geq 2\sqrt{z} \cdot x_i,$$

ebből

$$\frac{x_i^2}{y_i} \geq 2\sqrt{z} \cdot x_i - z \cdot y_i.$$

Most ezt az egyenlőtlenséget alkalmazzuk $i = 1, 2, ..., n$-re, majd adjuk össze ezen egyenlőtlenségeket és azt kapjuk, hogy:

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + ... + \frac{x_n^2}{y_n} \geq$$

$$\geq 2 \cdot \sqrt{z} \cdot (x_1 + x_2 + ... + x_n) - z \cdot (y_1 + y_2 + ... + y_n).$$

A z pozitív valós szám értékét most fogjuk alkalmas módon megválasztani.
Legyen

$$z = \left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{y_1 + y_2 + ... + y_n}\right)^2,$$

ekkor

$$\sqrt{z} = \frac{|x_1 + x_2 + ... + x_n|}{y_1 + y_2 + ... + y_n} \geq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{y_1 + y_2 + ... + y_n}.$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{y_n}\geq$$
$$\geq 2\cdot\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{y_1+y_2+\ldots+y_n}\right)\cdot(x_1+x_2+\ldots+x_n)-$$
$$-\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{y_1+y_2+\ldots+y_n}\right)^2\cdot(y_1+y_2+\ldots+y_n).$$

Ebből

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{y_n}\geq$$
$$\geq 2\cdot\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{y_1+y_2+\ldots+y_n}-\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{y_1+y_2+\ldots+y_n}.$$

Tehát igazoltuk, hogy

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{y_n}\geq\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{y_1+y_2+\ldots+y_n}.$$

Itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $\frac{x_i^2}{y_i}=z\cdot y_i$ fennáll $i=1, 2, \ldots, n$-re. Ebből következik, hogy egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $\frac{x_i}{y_i}=\sqrt{z}$ fennáll $i=1, 2, \ldots, n$-re.

A Cauchy-féle egyenlőtlenség új bizonyítása:

Legyen most $x_i=a_i\cdot b_i$ és $y_i=b_i^2$, ahol $i=1, 2, \ldots, n$. Itt a_i és b_i tetszőleges valós szám. Ekkor ezen számok teljesítik a 2. Segédtétel feltételeit, ugyanis vegyük észre, hogy ott x_i tetszőleges valós szám, míg y_i tetszőleges pozitív valós szám. Így alkalmazhatjuk a 2. Segédtételt.

$$\frac{(a_1\cdot b_1)^2}{b_1^2}+\frac{(a_2\cdot b_2)^2}{b_2^2}+\ldots+\frac{(a_n\cdot b_n)^2}{b_n^2}\geq$$
$$\geq\frac{(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\ldots+a_n\cdot b_n)^2}{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}.$$

Ebből

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\geq\frac{(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\ldots+a_n\cdot b_n)^2}{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+\ldots+b_n^{\,2}}.$$

Tehát

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\geq$$
$$\geq(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2.$$

Itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $\frac{x_i}{y_i}=\sqrt{z}$ fennáll $i=1, 2, \ldots, n$-re, azaz $\frac{a_i\cdot b_i}{b_i^2}=\sqrt{z}$. Tehát $\frac{a_i}{b_i}=\sqrt{z}=\lambda$, ahol $\lambda\neq 0$ valós szám. Ha ugyanis mindegyik a_i nullával egyenlő, akkor a Cauchy-féle egyenlőtlenség nyilván teljesül, mégpedig az egyenlőség esete áll fenn. Ugyanez van, ha minden b_i valós szám nulla.

Ezzel igazoltuk a Cauchy-féle egyenlőtlenséget arra a fő esetre, ha egyik b_i valós szám sem nulla.

A továbbiakban hátra van még az az eset, amikor legalább egy b_i nulla, de nem minden b_i nulla.

A következőkben ezt a mellékes esetet igazoljuk.

Legyen k darab nulla a b_i valós számok között, ahol $1\leq k<n$ egész szám.

Azt kell igazolnunk, hogy

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\leq$$
$$\leq\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}\quad(\#).$$

Ekkor az előzőeket figyelembe véve a következőképpen módosul a bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$a_1'b_1'+a_2'b_2'+\ldots+a_{n-k}'b_{n-k}'\leq$$
$$\leq\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1'^{\,2}+b_2'^{\,2}+\ldots+b_{n-k}'^{\,2}}$$
$$(\#\#),$$

ahol a b_1', b_2', ..., b_{n-k}' számok egyike sem nulla.

Tehát az előzőekben ismertetett komáromi trükkös bizonyítás alkalmazható az előző számokra és a nekik megfelelő a_i' értékekre. Ezt alkalmazva kapjuk, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$a_1'b_1'+a_2'b_2'+\ldots+a_{n-k}'b_{n-k}'\leq$$
$$\leq\sqrt{a_1'^{\,2}+a_2'^{\,2}+\ldots+a_{n-k}'^{\,2}}\cdot\sqrt{b_1'^{\,2}+b_2'^{\,2}+\ldots+b_{n-k}'^{\,2}}.$$

Ámde

$$\sqrt{a_1'^{\,2}+a_2'^{\,2}+\ldots+a_{n-k}'^{\,2}}\leq\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2},$$

így ezt felhasználva kapjuk, hogy (##) teljesül, ebből pedig következik, hogy (#) is fennáll.

5. Összefoglalás

A Cauchy-féle egyenlőtlenség igazolása a komáromi trükkel nem a legrövidebb bizonyítása a vizsgált egyenlőtlenségnek.

A bizonyításnak inkább csak elméleti jelentősége van. Ugyanis a bizonyításból kiderül, hogy a Cauchy-féle, illetve a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenséget ha tekervényes úton is, de le lehet vezetni a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség $n = 2$-re fennálló esetéből.

$$\boxed{AG\ n=2} \Rightarrow \boxed{R\ n, k=2} \Rightarrow \boxed{CBS\ n}$$

S mivel a Cauchy-féle egyenlőtlenségből az ismert módon könnyen és röviden levezethető a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség tetszőleges n pozitív egészre (ahol n legalább 2), ezért azt is kimutattuk, hogy a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség n-re fennálló általános esete levezethető az $n = 2$-re fennálló speciális esetéből.

$$\boxed{CBS\ n} \Rightarrow \boxed{AG\ n},$$

azaz

$$\boxed{AG\ n=2} \Rightarrow \boxed{AG\ n}.$$

Persze visszafelé még könnyebb menni egyszerű behelyettesítésekkel, úgyhogy a nyilak nyilván megfordíthatóak.

Irodalom és jegyzetek

[1] Barnard, S. and J. M. Child, *Advanced Algebra*, Macmillan, London, 1939. 273.old.

[2] Beckenbach, Edwin F. and Richard Bellmann, *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1961.

[3] Bullen, P. S., D. S. Mitrinoviæ and P. M. Vasiæ, *Means and Their Inequalities*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Boston-Lancaster-Tokyo, 1988.

[4] Csete Lajos, A komáromi trükk és egy versenyfeladat, *A Matematika Tanítása*, 2003/4. 4-11. oldal

[5] Hardy, G. H. – J. E. Littlewood – G. Pólya, *Inequalities*, Second Edition, Cambridge at the University Press, 1952. (First Edition 1934)

[6] Klambauer, G., *Problems and Propositions in Analysis*, Marcel Dekker, New York, 91. oldal, itt Cauchy–Schwarz-féle egyenlőtlenségnek emlegetik az egyenlőtlenséget és egyszerűen a Hölder-féle egyenlőtlenségbe való megfelelő behelyettesítéssel kapják.

[7] Kolmogorov, A.N. – Sz. V. Fomin, A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981. (A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenség bizonyítással az 52. oldalon.)

[8] Korovkin, P. P., *Egyenlőtlenségek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. 44. oldal 16. feladat útmutatással, és a 45-47. oldalon a Hölder-féle egyenlőtlenség levezetésének végén megkapva.

[9] Kosztolányi József – Makay Géza – Pintér Klára – Pintér Lajos, *Matematikai problémakalauz* I, Polygon, Szeged, 1999. 120-121. oldal, itt helyesen Cauchy-féle egyenlőtlenségnek nevezik az egyenlőtlenséget és két bizonyítását ismertetik.

[10] Mitrinoviæ, D. S., *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970. (A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenség Cauchy-féle egyenlőtlenségként szerepel a 41-42.oldalakon.)

[11] Mitrinoviæ, D. S., J.E. Peèariæ, and A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1993. 83-98. oldal

[12] Pólya György – Szegő Gábor, Feladatok és tételek az analízis köréből I., Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. 96. oldal 80. probléma a Cauchy-féle egyenlőtlenség, két bizonyítása a 287. oldalon.

[13] Rudin, Walter, *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978. 25. oldal, itt a szerző Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenségnek és röviden Schwarz-féle egyenlőtlenségnek emlegeti az egyenlőtlenséget.

[14] Skljarszkij, D.O. – N.N. Csencov – I. M. Jaglom, *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből*, I. rész, *Aritmetika és algebra* (Harmadik kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1976. (A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenség a 289. feladatként szerepel a 65. oldalon és négy bizonyítást olvashatunk a könyv 349-352. oldalain.)

Köszönöm szépen Varga Ferencné könyvtárvezető (Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete) segítségét.

Jelentés a 2004. évi Beke Manó-emlékdíjak odaítéléséről

A 2004. évi Beke Manó-emlékdíj bizottság körültekintő mérlegelés után az alábbi határozatot hozta:

A 2004. évi díj első fokozatában részesül Rácz János.

Rácz János matematika-fizika szakos tanár 58 éves tanári munkaviszonnyal rendelkezik, jelenleg is tanít a budapesti Szent István Gimnáziumban. 1957-ben lett „Istvános" tanár, 1963-ban létrehozta a speciális matematikai osztályt.

Teljesen hivatásának, a nevelő-oktató munkának élő tanár. Kiemelkedően felkészült, magas fokon oktatja a matematikát. Évtizedeken keresztül a matematika munkaközösség vezetője. Oroszlánrésze volt abban, hogy iskolájában országosan elismert matematikai műhely alakult ki.

Az oktató munkán túl rengeteget tett a matematika népszerűsítéséért, a tehetségek gondozásáért, kibontakoztatásáért. Különös szeretettel készíti fel tanulóit az országos versenyekre. Nem csupán az OKTV-n értek el diákjai szép eredményeket, de többen a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián is képviselhették hazánkat.

Nagy gonddal foglalkozik fiatal tanárokkal. 1969 óta mint az ELTE külső vezetőtanára, a tanárképzésben is igen eredményesen dolgozott. Tapasztalatait számos tanulmányban tette közzé, főleg a geometria tanításával kapcsolatban jelentek meg példatárai, tankönyvsorozata. Ezekről a kérdésekről többször tartott előadást.

A Beke Manó-díj második fokozatában részesül Antal Gábor Attila.

Antal Gábor Attila a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetemen 1956-ban szerzett matematika-fizika szakos középiskolai tanári oklevelet. 1956-59 között Szécsényben tanított az Általános Iskolában, délután a Dolgozók Általános Iskolájában tanított, majd az Ipari Szakmunkásképző Intézet matematika- és fizikaóráit látta el. 1959-69 között Nagybátonyban dolgozott a gimnáziumban, mellette a Bányaipari Technikum tanára is volt, mindezt három műszakban. Ugyanebben az időben még az egri Tanárképző Főiskola kihelyezett konzultációs csoportját is tanította és vizsgáztatta öt éven át. 1969-től 1996-ig a salgótarjáni Bolyai Gimnázium tanára, munkaközösségvezetője, továbbá szakfelügyelő, szaktanácsadó, tanügyi igazgatási szakértői teendőket látott el. Tanított a Pénzügyi és Számviteli Főiskola levelező tagozatán, tevékenykedett a főiskola felvételiztető bizottságában.

Számtalan tanítványát „fertőzte meg" a matematika szeretetével. Tantárgyát nagy hozzáértéssel oktatta, óráit a matematikatörténet anekdotáival és sajátos humorú vicceivel színesítette. Pontosságra, szakmai alázatra, a tudomány megbecsülésére és tiszteletére nevelt, és ennek volt ő maga is élő példája.

Nógrád megye szakfelügyelőjeként közel 100 iskola tartozott hozzá. A kezdő kollégákat egyenrangú partnerként kezelte, értékelte erőfeszítéseiket, kedvesen irányította helyes útra esetleges túlkapásaikat. Jó szándékú útmutatásaira sok kolléga a mai napig élénken emlékszik. Hatalmas munkabírású, fáradhatatlan tanár, segítőkész, megbízható ember.

A Beke Manó-díj második fokozatában részesül Ferenczi Éva.

Ferenczi Éva általános iskolai matematika-kémia szakos tanár. 1980-ban végzett Szegeden.

1982-től tanított a Bp. XVII. Ker. Pesti Úti Általános Iskolában. Saját tantestületében és azon túl is hamar kitűnt kiváló szakmai felkészültségével, a matematika tantárgy és a matematikai nevelés iránti elkötelezettségével, jó szervezőkészségével. Ezek alapján felkérést kapott a kerületi munkaközösség-vezetői feladatok ellátására. Szaktanári munkájához hasonlóan ezt a munkát is kollegái és szakmai felettesei teljes megelégedésére, mintaszerűen látta el. Tartotta a kapcsolatot a Fővárosi Pedagógiai Intézet szakmai fórumaival, a kerületi kollegáknak bemutató órákat és más továbbképzéseket tartott és szervezett. Figyelt a tanárok munkájában fellépő problémákra, és segített megkeresni a megfelelő megoldást. A Varga Tamás Versenyek első és második fordulójának kerületi lebonyolítását lelkiismeretesen intézte.

1998-ban a XVII. Ker. Balassi Bálint nyolc évfolyamos gimnáziumba került tanítani. Míg korábbi munkájában a lemaradók és a matematikából érdeklődők fejlesztése egyaránt hangsúlyos volt, a gimnáziumban a tehetséggondozás szép tanári feladata került előtérbe. Felkészítő munkájának eredményeképpen tanítványai évről évre egyre jobban szerepelnek a Varga Tamás, a Zrínyi Ilona és az ABACUS feladatmegoldó versenyeken.

Folyamatos, naprakész szaktanári munkája, diákjainak eredményei, kollegáinak megbecsülése teszi méltóvá a Beke Manó-díjra.

A Beke Manó-díj második fokozatában részesül Dr. Filep László.

Dr. Filep László 40 évvel ezelőtt szerzett matematika-fizika szakos tanári oklevelet a Kossuth Lajos Tudományegyetemen. Ezután 9 évig középiskolában tanított, többek között a tagozatos osztályokban is. Diákjai eredményesen szerepeltek a versenyeken és a KöMaL pontversenyén, miközben ő maga A Matematika Tanítása folyóirat egyik legeredményesebb feladatmegoldója lett.

1973-tól oktat a nyíregyházi Bessenyei György Tanárképző Főiskolán. Közben folytatja a tehetséggondozást, középiskolai szakkört vezet Nyíregyházán és Mátészalkán. Matematikatörténeti kutatómunkájának jelentős állomása doktorálása 1978-ban summa cum laude minősítéssel. Ismeretterjesztő tevékenységét nagyszámú cikk, tanulmány, előadások és könyvek jelzik. A tudományok királynője című összefoglaló műve sok évtizedes főiskolai előadásainak tapasztalatait összegzi.

Előadásai, írásai nemcsak nagy tudását, szakmai hozzáértését tükrözik, hanem élvezetes fanyar humorát, remek előadói stílusát is. A társadalmi és a szakmai közélet aktív szereplője, a Bolyai Társulat megyei tagozatának elnöke.

A Beke Manó-díj második fokozatában részesül Szabó Zsófia.

Szabó Zsófia a békéscsabai Rózsa Ferenc Gimnázium matematika-fizika-számítástechnika szakos tanára, ízig-vérig pedagógus. Önzetlenül szorgalmas és tanítványainak sokat nyújtó, igényes tanár. Szerencsés kettősségben ötvözi a következetesen szigorú, ugyanakkor határtalanul empatikus tanító személyiséget. Ennél fogva az önfegyelmet, a szívós munkát, a hosszú távú eredményességet értékelő tanulók és szülők értik és érzik tiszta szigorúságát. Informatikából az elsők között szerzett szakképesítést. Példásan illusztrálja a megújulási lehetőségeket, és bizonyító erővel annak szükségességét. Érdekesen tanít, kutató, felfedező oktatási stratégiája példamutató. Lelkesedése és lelkesítő példája erőteljesen hat. A tehetségeseket éppúgy jó érzékkel gondozza, mint ahogyan a gyengébbek előrehaladását segíti. Szívesen vállal osztályfőnöki feladatot. Közösségformáló munkáját látványos, pozitív átalakulás dicséri.

Tanítványai számos eredményt értek el a regionális és országos versenyeken. Ő maga a Hajnal Imre Matematikai Tesztverseny és Módszertani Nap, valamint a „Matematika Határok Nélkül" csapatverseny egyik szervezője. Kitüntetésével a töretlen becsülettel és hittel végzett tanári munka és személyiség nyer méltó elismerést.

A Beke Manó-díj második fokozatában részesül Tarcsay Tamás.

Tarcsay Tamás matematika-fizika-technika szakos tanár 1979 óta tanít a szegedi Ságvári Endre Gyakorló Gimnáziumban. A magas színvonalú, sokoldalú oktató, nevelőmunkájának eredményeképpen 1985 óta matematika szakvezető tanár.

Munkája során speciális tantervű, fakultatív, valamint alapóratervű matematikát tanuló, különböző tehetségű tanulókkal egyaránt eredményesen foglalkozik. Rendkívül eredményes az a törekvése, hogy tanítványaiban felkeltse a problémaérzékenységet és ezáltal kialakítsa a tantárgy iránti érdeklődést. Ennek is köszönhető, hogy igen sok tanítványa választotta életpályának a matematika művelését, tanítását.

Folyamatosan nagy figyelmet szentel a számítógépek, a számítástechnika kellő körültekintéssel történő órai alkalmazásának. Sok energiát fektet a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika számítógépes tanításának módszertani kidolgozásába. 1999 nyarától a Sulinet program internetes matematika rovatának vezetője. Az igényes, tanárok és tanulók számára egyaránt rendkívül hasznos elektronikus lap szerkesztésével elévülhetetlen érdemeket szerez a matematika tantárgy népszerűsítésében.

A Beke Manó-díj második fokozatában részesül Tóth Ferencné.

Tóth Ferencné Budapesten a XI. kerületben a Bocskai István Általános Iskolában folytatta kimagasló pedagógiai tevékenységét több évtizeden keresztül, mely hatással volt a kerület szakmai életére is.

Pályafutása alatt az alsó tagozaton tanítóként, munkaközösség-vezetőként, majd igazgatóhelyetteseként tanította a matematika tantárgyat. Ez irányú nevelő, oktató munkája során sokat tett azért, hogy tanítványaival megszerettesse a matematikát. Hatékonyan alkalmazta a gyerekek életkorának megfelelő, a közvetlen tapasztalatokra, a sokszínű szemléltetésre épülő módszereket. Tanítványai megszerették a matematikát, sikeresen helyt álltak a felső tagozaton, jó eredményeket értek el kerületi és fővárosi szintű versenyeken. Folyamatosan részt vett kísérletekben, több tankönyvnek, taneszköznek a kidolgozásában. Nyugdíjasként is elkötelezettje, fáradhatatlan képviselője az alsó tagozatos matematikatanítás ügyének. Gazdag tapasztalatait kézikönyvekben, a tanulók differenciálását szolgáló munkafüzetekben összegzi. Ezek nagy hiányt pótoltak, ezért igen népszerűek a tanítók, gyermekek, szülők körében. Életpályája, szakmai munkássága, nevelő, oktató munkája, személyisége példaértékű.

Fitos László

Speciális pitagoraszi számhármasok és számnégyesek

A speciális pitagoraszi számhármasok speciális derékszögű háromszögek oldalhosszai, a speciális pitagoraszi számnégyesek pedig speciális téglatestek éleinek és testátlójának hosszai, ugyanis a Pitagorasz-tétel egyik háromdimenziós általánosítása $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, ahol a, b, c a téglatest éleinek, d pedig a testátlójának a hosszát jelenti.

I. A cikk első részében olyan derékszögű háromszögekkel fogunk foglalkozni, amelyeknek oldalhosszai, azon kívül, hogy pozitív egész számok és kielégítik a Pitagorasz-tételt, még egy adott feltételnek is eleget tesznek.

1. feladat: Melyek azok a derékszögű háromszögek, amelyeknek oldalhosszai pozitív egész számok és az átfogójuk 18 cm-rel hosszabb az egyik befogójuknál?

Megoldás: Akkor a legegyszerűbb a megoldás, ha felhasználjuk a pitagoraszi számhármasok általános képleteit. Ezek: $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$, $c = p^2 + q^2$; (p és q pozitív egész számok és $p > q$). Az adott feltétel szerint $c - a = 18$, azaz $2q^2 = 18$ és ebből $q = 3$. Ezért a háromszög oldalai: $a = p^2 - 9$, $b = 6p$, $c = p^2 + 9$ és mivel $p > q$, emiatt $p > 3$. A feladatnak végtelen sok megoldása van, hiszen p értéke bármely 3-nál nagyobb egész szám. Néhány megoldás a, b, c számhármasa a következő:

p	$a = p^2 - 9$	$b = 6p$	$c = p^2 + 9$
4	7	24	25
5	16	30	34
6	27	36	45
7	40	42	58

1. táblázat

2. feladat: Egy derékszögű háromszög mindegyik oldalának hossza pozitív egész szám, továbbá az átfogó és az egyik befogó összege 72 cm. Hány ilyen derékszögű háromszög van és mekkorák az oldalai?

Megoldás: Itt is felhasználjuk a pitagoraszi számhármasok általános képleteit. Ezek segítségével $c + a = 2p^2 = 72$, amiből $p = 6$, és akkor a háromszög oldalai q-val kifejezve: $a = 36 - q^2$, $b = 12q$, $c = 36 + q^2$. Mivel pedig $q < p = 6$, ezért q értéke csak ötféleképpen választható meg. Tehát csak öt olyan derékszögű háromszög van, amely az adott feltételeket kielégíti. E háromszögek oldalainak hosszát a következő táblázat tartalmazza:

p	q	$a = 36 - q^2$	$b = 12q$	$c = 36 + q^2$
6	1	35	12	37
6	2	32	24	40
6	3	27	36	45
6	4	20	48	52
6	5	11	60	61

2. táblázat

3. feladat: Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek oldalhosszai pozitív egész számok és a beírt körük sugara 12 cm?

Megoldás: Mivel a beírt kör átfogót érintő pontja az átfogót egy $a - r$ és egy $b - r$ hosszú szakaszra osztja (r a beírt kör sugara), ezért $a - r + b - r = c$. Ebből $2r = a + b - c$ és a pitagoraszi számhármasok képleteinek felhasználásával $2r = p^2 - q^2 + 2pq - p^2 - q^2 = 2pq - 2q^2$, vagyis $r = pq - q^2 = q(p - q) = 12$. Mivel pedig 12 hatféleképpen bontható fel két természetes szám szorzatára, ezért a feladatnak hat pitagoraszi számhármasa tesz eleget. Ezek táblázatba foglalva a következők:

q	$p-q$	p	$a=p^2-q^2$	$b=2pq$	$c=p^2+q^2$
1	12	13	168	26	170
2	6	8	60	32	68
3	4	7	40	42	58
4	3	7	33	56	65
6	2	8	28	96	100
12	1	13	25	312	313

3. táblázat

Érdekes észrevétel: E feladat megoldásainak száma mindig megegyezik a beírt kör sugara osztóinak a számával.

4. feladat: Van-e olyan derékszögű háromszög, amelynek oldalai pozitív egész számok és a kerülete 240 cm hosszú?

Megoldás: $k=a+b+c=p^2-q^2+2pq+p^2+q^2=2p^2+2pq=2p(p+q)=240$, vagyis $p(p+q)=120$. Most már csak az a kérdés, hogy hányféleképpen lehet a 120-at két tényezőre felbontani úgy, hogy a $p>q$ és a $p+q>p$ feltételek teljesüljenek. Rövid vizsgálattal kiderül, hogy csak kétféleképpen, éspedig a $p=8$ és $p+q=15$, vagy ha $p=10$ és $p+q=12$. Az egyik esetben a háromszög oldalai $a=15$, $b=112$, $c=113$; a másik esetben $a=96$, $b=40$, $c=104$.

II. A cikk második részében téglatestekre vonatkozó feladatok fognak szerepelni és a megoldásukban felhasználjuk a pitagorászi számnégyesek általános képleteit. Ezek a következők: $a=p^2-q^2-r^2$, $b=2pq$, $c=2pr$, $d=p^2+q^2+r^2$. ($p^2>q^2+r^2$ és p, q, r pozitív egész számok).

5. feladat: Egy téglatest éleinek és testátlójának hossza pozitív egész szám és a testátló 20 cm-rel hosszabb az egyik élnél. Hány ilyen téglatest van és mekkorák az éleik?

Megoldás: Az éleket a-, b-, c-vel, a testátlót d-vel jelölve és felhasználva az előbb leírt pitagoraszi számnégyesek képleteit, kapjuk $d-a=p^2+q^2+r^2-(p^2-q^2-r^2)=2q^2+2r^2=20$, azaz $q^2+r^2=10$. Mivel q és r pozitív egész számok, ezért csak $q=3$ és $r=1$ lehetséges. $p^2>q^2+r^2=10$ miatt $p^2>10$ és így $p>3$. A pitagoraszi számnégyes a $q=3$ és $r=1$ helyettesítésekkel: $a=p^2-10$, $b=6p$, $c=2p$, $d=p^2+10$. A feladatnak végtelen sok megoldása van, hiszen bármely 3-nál nagyobb pozitív egész számot téve p helyébe, pitagoraszi számnégyest kapunk. Ezekből a számnégyesekből néhányat a következő táblázat tartalmaz:

p	$a=p^2-10$	$b=6p$	$c=2p$	$d=p^2+10$
4	6	24	8	26
5	15	30	10	35
6	26	36	12	46
7	39	42	14	59

4. táblázat

6. feladat: Hány olyan téglatest van, amelynek mind a három éle és a testátlójának hossza is pozitív egész szám, továbbá a testátló és az egyik él összege 50 cm?

Megoldás: A pitagoraszi számnégyesek általános képleteit felhasználva, kapjuk: $d+a=2p^2=50$, amiből $p=5$. Mivel azonban $a=p^2-q^2-r^2=25-q^2-r^2$ pozitív egész szám, ezért $q^2+r^2<25$. Ezt a feltételt, amint az 5. táblázatból is láthatjuk, nyolc számpár elégíti ki, ha két él egyenlőségét is megengedjük.

7. feladat: Egy téglatest két éle és a testátlója egy számtani sorozat három egymás után következő tagja, továbbá az élek hossza és a testátló pozitív egész számok. Hány ilyen téglatest van?

Megoldás: Ha a, b, d egy számtani sorozat három egymás után következő tagja, akkor $2b=a+d$, és ez a pitagoraszi számnégyesek általános képleteinek behelyettesítésével: $4pq=2p^2$, amiből egyszerűsítés után $p=2q$. Ennek alapján a 6. táblázatot készíthetjük el.
A táblázat a végtelenségig folytatható, tehát végtelen sok olyan téglatest van, amely az adott feltételeket kielégíti.

Mivel a Pitagorasz-tétel háromdimenziós általánosítása a derékszögletű tetraéder lapjainak a területére is érvényes (a derékszöglettel szemközti lap (átfogólap) területének négyzete egyenlő a többi három lap (befogólapok) területének a négyzetösszegével), ezért befejezésül egy derékszögletű tetraéderre vonatkozó feladatot is megoldunk.

8. feladat: Hány olyan derékszögletű tetraéder van, amelynek a felszíne 720 cm^2 és mind a négy lapjának a területe egész szám?

Megoldás: A felszín, vagyis a négy lap területének összege: $p^2 - q^2 - r^2 + 2pq + 2pr + p^2 + q^2 + r^2 = 2p^2 + 2pq + 2pr = 2p(p + q + r) = 720$. Ebből $p(p + q + r) = 360$. Tehát az a kérdés, hogy a 360-at hányféleképpen lehet két olyan pozitív egész tényezőre felbontani, hogy a $p^2 > q^2 + r^2$ és $p < p + q + r$ feltételek is teljesüljenek. A vizsgálat eredménye az, hogy csak a $360 = 15 \cdot 24$ és a $360 = 18 \cdot 20$ felbontásból kapunk megoldásokat. A következő táblázat tartalmazza az adott feltételeket kielégítő öt tetraéder lapjainak területét. Ezekből kiszámíthatók a tetraéderek élei is.

Megjegyzések:

1. Ha az 1. feladatban az átfogó és a másik befogó különbsége van megadva, akkor is végtelen sok a megoldás, ha ez a különbség négyzetszám. Például, ha $c - b = p^2 + q^2 - 2pq = (p - q)^2 = 4$, akkor $p - q = 2$ és $p = q + 2$. Tehát az oldalak hossza q-val kifejezve: $a = 4q + 4$, $b = 2q(q + 2)$ és $c = 2q^2 + 4q + 4$. Ezek a képletek valóban végtelen sok megoldást adnak, mert q helyébe bármelyik pozitív egész számot behelyettesíthetjük.

2. Ha az 5. feladatban nem a $d - a$ különbség van megadva, hanem a $d - b$ és ez a különbség olyan négyzetszám, amely két négyzetszám összegére bontható, akkor is végtelen sok megoldása van a feladatnak. A megoldást az olvasóra bízom.

p	q	r	$a = 25 - q^2 - r^2$	$b = 10q$	$c = 10r$	$d = 25 + q^2 + r^2$
5	2	1	20	20	10	30
5	3	1	15	30	10	35
5	3	2	12	30	20	38
5	4	1	8	40	10	42
5	4	2	5	40	20	45
5	3	3	7	30	30	43
5	2	2	17	20	20	33
5	1	1	23	10	10	27

5. táblázat

p	q	r	$a = p^2 - q^2 - r^2$	$b = 2pq$	$c = 2pr$	$c = p^2 + q^2 + r^2$
4	2	1	11	16	8	21
4	2	3	3	16	24	29
6	3	1	26	36	12	46
6	3	2	23	36	24	49
6	3	4	11	36	48	61
6	3	5	2	36	60	70
8	4	1	47	64	16	81

6. táblázat

p	$p + q + r$	q	r	$t_1 = p^2 - q^2 - r^2$	$t_2 = 2pq$	$t_3 = 2pr$	$t_4 = p^2 + q^2 + r^2$
15	24	8	1	160	240	30	290
15	24	7	2	172	210	60	278
15	24	6	3	180	180	90	270
15	24	5	4	184	150	120	266
18	20	1	1	322	36	36	326

7. táblázat

Csorba Ferenc

Aranymetszés és Fibonacci-sorozat

Anyáron több helyen, így Rév-Komáromban (Urbán János előadásán) vagy a nyíregyházi Rátz László Vándorgyűlésen is „belefutottam" a Fibonacci-sorozatba (Laczkovich Miklós nyitó előadása, Szalay István: „Fibonacci-sorozat kettős látásmódban"). Természetes módon vetődik fel az aranymetszés problémája. Az is érdekelt, hogy vajon a görögök hogyan szerkeszthették meg egy másodfokú egyenlet gyökét, gyökeit.

Legyen (a_n) a Fibonacci-sorozat és oldjuk meg az $x = \frac{a_n + a_{n-1}x}{a_{n+1} + a_n x}$ (1) egyenletet. Egyenértékű átalakításokkal $a_n x^2 + (a_{n+1} - a_{n-1})x = a_n$, illetve $a_{n+1} - a_{n-1} = a_n$, $a_i \neq 0$, $x^2 + x = 1$ adódik. Ebből $x(1+x) = 1$, $x = \frac{1}{1+x}$, majd folytatva

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}, \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}}, \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}}}, \ \ldots$$

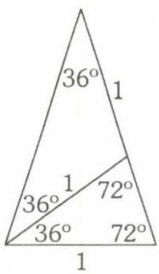
„emeletes" törteket kapjuk, amelyek egyszerűbb alakban $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1+x}{2+x}$, $\frac{2+x}{3+2x}$, $\frac{3+2x}{5+3x}$, ..., visszajutottunk (1)-hez. Ide vezet a szabályos tízszög (1. ábra) és a görögök által „szép"-nek mondott téglalap (2. ábra) szerkesztése is.

Az 1. ábra jelölései alapján a háromszögek hasonlósága miatt $\frac{x}{1} = \frac{1}{1+x}$, vagy $x(1+x) = 1$.

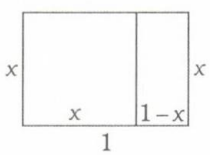
Egy „szép" téglalap (2. ábra) feldarabolható egy négyzetre és egy, az erdetihez hasonló téglalapra. Legyen a négyzet oldala x, a téglalap hosszabb oldala 1. Ekkor a téglalapok hasonlósága miatt $\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$, illetve $x(1+x) = 1$.

A feladat ezen másodfokú egyenlet (pozitív) gyökének megszerkesztése. Tekintsük a $CB = BF = FD = 1$ egymásra merőleges szakaszokat és a CD szakasz Thalesz-körét a 3. ábrának megfelelően. Az $x^2 + x = 1$ egyenlet pozitív gyöke az AB szakasz. Az ABC és az AFD háromszögek hasonlóak, mindkettő derékszögű és a BCA, valamint a DAF szögek egyenlőek, hiszen merőleges szárú hegyesszögek. Ekkor $\frac{x}{1} = \frac{1}{1+x}$, s ezt állítottuk. (Az egyenlet másik gyöke a BE szakasz (-1)-szerese.) A negyedik ábra alapján szerkeszthető az $x^2 + px = q$, $(p > 0, q > 0)$ másodfokú egyenlet pozitív gyöke $AB = x$. Könnyen látható, hogy az egyenlet másik gyökének (-1)-szerese a BE szakasz (Az ABC és a HBE háromszögek hasonlóak, $\frac{x}{1} = \frac{q}{BE}$, a gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján $x \cdot BE = x_1 \cdot x_2 = -q$).

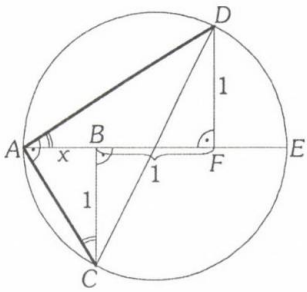
A görögök így csinálták? Vagy másképp? Hát, nem tudom...



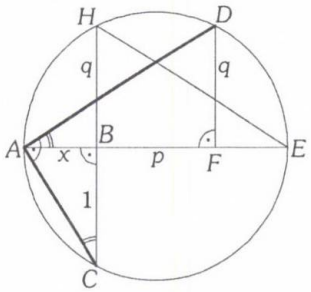
1. ábra



2. ábra



3. ábra



4. ábra

Urbán János

A XXXIII. Országos Kalmár László Matematikaverseny döntőjéről

A TIT Teleki László Ismeretterjesztő Egyesület a szokásokhoz híven Vácott rendezte meg 2004. június 28–30-ig a Kalmár László Matematikaverseny országos döntőjét az 5–8. osztályos tanulók számára. A kétnapos, kétfordulós versenyen az ország minden részéből összesen 96 tanuló vett részt, mégpedig azok, akik a verseny megyei (fővárosi) fordulójában a legjobb eredményt érték el.
A négy évfolyamban a legjobb helyezéseket a következő tanulók érték el:

5. osztály

I. Dankovics Attila, Budapest, Veres Péter Gimnázium (tanára Rácz Mihályné)
II. Sváb Gergely, Budapest, Veres Péter Gimnázium (tanára Rácz Mihályné)
III. Kaposvári Tamás, Budapest, Gárdonyi Géza Ált. Iskola (tanára Berkes Klára)

6. osztály

I. Kiss Réka, Budapest, ELTE Radnóti Gimnázium (tanára Morvai Éva)
II. Somogyi Ákos, Kaposvár, Nagyboldogasszony Római Katolikus Ált. Isk. (tanára Witzlné Horváth Anita)
III. Dinh Van Anh, Budapest, ELTE Radnóti Gimnázium (tanára Morvai Éva)

7. osztály

I. Radnai Ágnes, Budapest, Veres Péter Gimnázium (tanára Számadóné Békési Szilvia)
II. Nagy Dániel, Hajdúböszörmény, Bocskai István Ált. Isk. (tanára Juhász László)
III. Grósz Dániel, Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium (tanárai Hraskó András, Rubóczky György, Pósa Lajos)

8. osztály

I. Szalkai Balázs, Veszprém, Szilágyi Erzsébet Keresztény Ált. Isk. (tanára Gyúró Andrásné)
II. Eisenberger András, Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium (tanárai Fazakas Tünde, Beleznai Ferenc, Pósa Lajos)
III. Szirmai Péter, Kisvárda, Vári Emil Ált. Isk. (tanára Csapó Lászlóné)

A verseny döntőjének két napján a következő feladatokat tűzte ki a versenybizottság:

Ötödik osztály
1. nap

1. Kiszámítottuk az összes tízes számrendszerbeli kétjegyű pozitív egész szám számjegyeinek szorzatát (pl. $1 \cdot 2 = 2$, $9 \cdot 8 = 72$), és a kapott szorzatokat összeadtuk. Mennyi lett az összeg?

2. Melyik az a tízes számrendszerbeli legkisebb pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege osztható 8-cal, és a nála eggyel nagyobb szám számjegyeinek összege is osztható 8-cal?

3. Egy kocka minden lapját 4 egybevágó négyzetre bontottuk, és minden kis négy-

zetet a piros, sárga, kék szín valamelyikével kiszíneztük úgy, hogy bármely két kis négyzetnek, ha van közös oldala, a színe különböző legyen. Hány piros, hány kék, hány sárga kis négyzetet kaptunk? Válaszodat indokold meg!

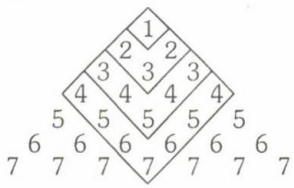
4. Barnabás egy háromjegyű számra gondolt, Bencének ezt kellett kitalálnia. Barnabás segítségként leírta a következő háromjegyű számokat:

145, 346, 126.

Annyit elárult, hogy mindegyik leírt szám pontosan egy helyiértéken egyezik meg a gondolt számmal, a másik két helyiértéken különbözik. Melyik számra gondolt Barnabás?

Hatodik osztály
1. nap

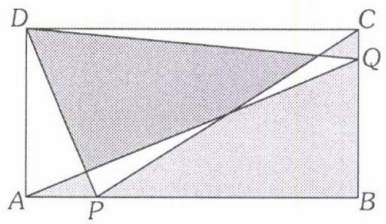
1. Készítsük el a következő háromszög alakú számtáblázatot:



Az első sorban egy 1, a másodikban két 2 áll, és így tovább. Ezután számítsuk ki az ábrán jelölt 2×2-es, 3×3-as, 4×4-es és így tovább négyzetekben található számok összegét. Mit tapasztalunk? Magyarázzuk meg!

2. Számítsuk ki, hogy 3 óra 36 perckor hány fokos szöget zár be az óramutató és a percmutató !

3. Az $ABCD$ téglalap AB oldala 8 cm, BC oldala 4 cm. Az AB oldal tetszőleges pontja P, a BC oldal egy tetszőleges pontja Q. P-t összekötöttük D-vel és C-vel, Q-t pedig A-val és D-vel. Igazoljuk, hogy a sötétszürke terület egyenlő a világos szürke területek összegével!



4. Adjunk meg 10 olyan pozitív egész számot, amelyekre teljesül, hogy a számok összege egyenlő ugyanezen számok szorzatával!

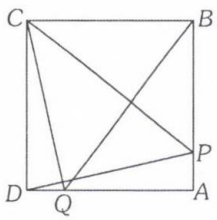
Hetedik osztály
1. nap

1. Van-e a pozitív egész számok körében megoldása a következő egyenletnek?

$$28x + 30y + 31z = 365.$$

2. Van 30 kártyánk, ezekre ráírtuk 1-től 30-ig a pozitív egész számokat (mindegyikre egyet). Valaki elvett közülük 10 kártyát úgy, hogy a rajtuk levő számok összege 155. Bizonyítsuk be, hogy a megmaradt 20 kártyát két tízes csoportra lehet bontani úgy, hogy mindegyik csoportra igaz: a csoporthoz tartozó kártyákra írt számok összege 155.

3. Az $ABCD$ négyzet A csúcsához csatlakozó két oldalán megjelölik a P és Q pontot úgy, hogy $AP + AQ = AB$ teljesül. Igazoljuk, hogy a $PBQ\sphericalangle + PCQ\sphericalangle + PDQ\sphericalangle = 90^\circ$.



4. Hány számjegyből áll a következő szám tízes számrendszerben felírt alakja?

$$4^{14} \cdot 5^{23}$$

5. Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldalán felvettük a C_1 és Q pontokat, BC oldalán az A_1 és P pontokat, CA oldalán a B_1 pontot úgy, hogy C_1P és QA_1 párhuzamos AC-vel, QB_1 párhuzamos BC-vel és B_1P párhuzamos AB-vel. Igazoljuk, hogy az AB_1C_1 háromszög területe egyenlő a CB_1A_1 háromszög területével!

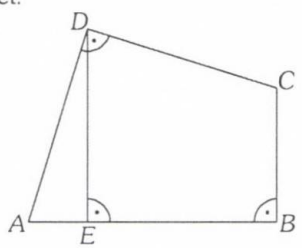
Nyolcadik osztály
1. nap

1. Mutassuk meg, hogy

$$2004^2 + 2002 \cdot 2003 \cdot 2005 \cdot 2006$$

egy pozitív egész szám négyzete!

2. Az $ABCD$ négyszögben $ABC\sphericalangle = CDA\sphericalangle = 90°$, $AD = DC$ és a DE magasság hossza 1 egység. Számítsuk ki a négyszög területét!

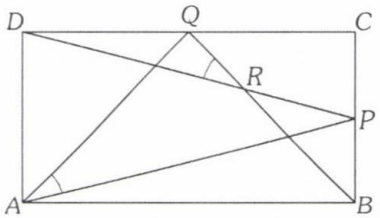


3. Ki lehet-e választani az

$$\frac{1}{100}, \frac{2}{99}, \frac{3}{98}, \ldots, \frac{50}{51}$$

törtek közül kettőt úgy, hogy az összegük 1 legyen?

4. Az $ABCD$ téglalap BC oldalának felezőpontja P, CD oldalának felezőpontja Q. R a BQ és DP egyenesek metszéspontja. Igazoljuk, hogy $PAQ\sphericalangle = DRQ\sphericalangle$.



5. Egy iskolában 6 csapattal kispályás focibajnokságot rendeztek. A 6 csapat sorra 12, 10, 9, 8, 7, 6 pontot gyűjtött (minden csapat minden másikkal egyszer játszott). Döntetlenért 1 pontot, vereségért 0 pontot kaptak a csapatok. Mennyi pontot kapott egy csapat a győzelemért, ha tudjuk, hogy győzelemért is egész számú pont járt?

Ötödik osztály
2. nap

1. Egy négyzet alakú 3×3-as táblázatba írjuk be az 1, 2, 3,..., 8, 9 számokat úgy, hogy bármely sorban, bármely oszlopban és a két átlóban is a számok összege különböző legyen!

2. A következő számsorozatban töltsük ki az üres mezőket úgy, hogy bármely 3 szomszédos mezőre írt szám összege 9 legyen!

4								3			

3. Egy kocka 4 csúcsához 1-est, 4 csúcsához 2-est írtunk. Ezután minden élre ráírtuk az él két végpontjához írt szám összegét. Ezt követően minden lapra ráírtuk a lapot határoló élekre írt számok összegét. Végül összeadtuk a lapokra írt számokat. Mennyi lehet az utolsó összeg?

4. Van 3 különböző hosszúságú egyforma vastag kék pálcikánk, együttes hosszuk 30 cm, és 5 darab egyforma vastag piros pálcikánk, ezek együttes hossza is 30 cm. Szét lehet-e vágni a pálcikákat úgy; hogy a piros és kék darabokat össze lehessen párosítani, és egy párba egyforma hosszú pálcikák kerüljenek? Ha igen, adj meg egy eljárást!

Hatodik osztály
2. nap

1. Egy iskolából a felső tagozatosok kirándulni mennek. Ha a költségekre minden tanuló 750 Ft-ot fizet be, akkor 4400 Ft-tal

kevesebb pénz gyűlik össze, mint amennyire szükség van. Így mindegyiknek 800 Ft-ot kell befizetni, ekkor viszont 4400 Ft-tal több gyűlik össze a szükségesnél. Hányan mennek kirándulni?

2. Négy óra után mennyi idő múlva fedi egymást először az óra kis és nagy mutatója?

3. Adott két egybevágó konvex négyszög. Egyiket az egyik átlója mentén, másikat a másik átlója mentén két-két háromszögre bontjuk. Mutassuk meg, hogy a kapott 4 háromszögből paralelogramma állítható össze!

4. A 2-t kétféleképpen, lehet egy vagy több pozitív egész összegére bontani: 2, 1 + 1. A 3-at 4 féleképpen: 3, 2 + 1, 1 + 2, 1 + 1 + 1 (a különböző sorrendben álló azonos tagok különböző előállítást jelentenek). Határozzuk meg, hogy a 4, 5, 6, 7 számokat hányféleképpen lehet így felbontani pozitív egész számok összegére?

Hetedik osztály
2. nap

1. Mutassuk meg, hogy a tízes számrendszerben felírt tizenegy jegyű

12345654321

szám egy pozitív egész szám négyzete (négyzetszám)! Adjunk példát olyan négyzetszámra, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában minden 0-tól különböző számjegy legalább egyszer szerepel!

2. Egy 1 dm élű kockát 6 darab 1 dm^2 területű négyzet alakú papírlappal be tudunk hurkolni egyrétűen és hézagtalanul úgy, hogy a papírdarabokat nem kell elvágni. Be lehet-e ugyanígy burkolni az 1 dm élű kockát 12 db, négyzet alakú 0,5 dm^2 területű papírlappal úgy, hogy itt sem kell vágni?

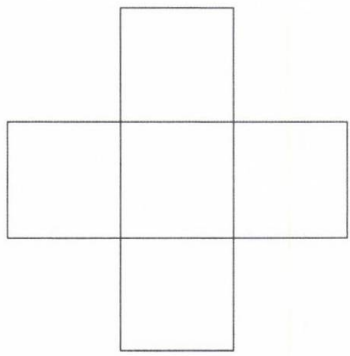
3. Melyek azok a háromjegyű számok, amelyek egyenlők azzal a szorzattal, amelynek egyik tényezője a háromjegyű szám második és harmadik jegyéből álló kétjegyű szám, másik tényezője pedig a háromjegyű szám utolsó számjegye?

4. Meg lehet-e adni 10 egymást követő pozitív egész számot úgy, hogy közülük az első 5 legkisebb közös többszöröse egyenlő legyen a második 5 szám legkisebb közös többszörösével?

Nyolcadik osztály
2. nap

1. Állítsuk elő a lehető legtöbb egymást követő pozitív egész szám összegeként 2004-et!

2. Mutassuk meg, hogy egy kocka felületét be lehet burkolni hézagtalanul és egyrétűen 6 olyan egybevágó kereszt alakú papírlappal, amelyek mindegyike 5 egybevágó négyzetből áll, és egy „kereszt" területe egyenlő egy kockalap területével. Papírlapokat szétvágni nem lehet, csak behajtani.



3. Elkészítjük az összes lehetséges olyan öttényezős szorzatot, amelynek tényezői 10-nél nem nagyobb különböző pozitív egészek és semelyik két tényező összege sem 11. Az így kapott számokat összeadjuk. Menynyi lesz az összeg?

4. Egy körvonalon az A_1, A_2, A_3, ..., A_{10} pontok sorra az óramutató járásával ellenkező irányban haladva egy szabályos tízszög csúcsai. Igazoljuk, hogy

$$A_1A_{10} + A_3A_8 + A_5A_6 = A_2A_9 + A_4A_7!$$

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2004. november 30.

Feladatok (255-259)

255. Tudjuk, hogy egy háromszög két magassága 6, illetve 12 egység hosszú. Mit állíthatunk a harmadik magasságról?

256. Határozzuk meg azokat az x, y, z páronként különböző valós számokat, amelyekre

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{(2x+y+z)^2}{x(y+z)} = \frac{(x+2y+z)^2}{y(z+x)} = \frac{(x+y+2z)^2}{z(x+y)}.$$

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

257. *A* és *B* olyan pozitív egész számok a tízes számrendszerben, amelyekre teljesül, hogy $A = 7B$, és A számjegyeinek összege kétszer akkora, mint B számjegyeinek összege. A C számot úgy kapjuk, hogy B-t közvetlenül A után írjuk. Igazoljuk, hogy C osztható 9-cel.

258. Állítsuk elő $\sqrt{k^2+1}$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ lánctört alakját. (Az $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$ alakú kifejezést nevezzük lánctörtnek, ahol az $\{a_n\}$ véges vagy végtelen sorozat első tagja (a_0) egész szám, többi tagja pozitív egész szám.)

Rakonczai György, Budapest

259. Legyen p 2-nél nem kisebb pozitív egész szám. Határozzuk meg azon α valós számokat, amelyekre a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \log_p n \rfloor}}{n^\alpha}$ sor konvergens. ($\lfloor x \rfloor$ az x valós szám egészrésze.)

Dályay Pál Péter, Szeged

Feladatmegoldások (240-244. feladatok)

240. Egy körvonalon kijelöltünk 2004 pontot. Hány konvex sokszöget határoznak meg ezek a pontok?

Megoldás: Bármely, legalább három pont által meghatározott sokszög konvex, így n adott pont esetén a kérdéses sokszögek száma megegyezik az n elemű halmaz legalább három elemű részhalmazainak számával. Ez a következőképpen határozható meg:

$$\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} - \binom{n}{2} = 2^n - \frac{n^2+n+2}{2}.$$

$n = 2004$ esetén ez a szám $2^{2004} - 2009011$.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 9.

241. Az a, b, c pozitív egész számokról tudjuk, hogy (1) $b \mid a^3$; (2) $c \mid b^3$; (3) $a \mid c^3$. Bizonyítsuk be, hogy $abc \mid (a+b+c)^{13}$!

Megoldás: Az $(a+b+c)^{13}$ kifejtésében minden tag $n \cdot a^k b^l c^m$ alakú, ahol $n \in \mathbb{N}^+$; $k, l, m \in \mathbb{N}$; $k+l+m = 13$. Belátjuk, hogy mindegyik tag osztható az abc szorzattal.

1. Ha $k, l, m \geq 1$, akkor állításunk triviálisan teljesül.

2. Tegyük fel, hogy például $m = 0$. (Ez a szimmetria miatt nem jelent megszorítást.) Ekkor azt kell belátnunk, hogy $abc \mid a^k b^l$ $(k+l = 13)$.

a) k és l közül az egyik, mondjuk $k = 0$. Ekkor $a^k b^l = b^{13} = b^9 \cdot b \cdot b^3$. A (2) és (3) feltétel alapján $a \mid b^9$ és $c \mid b^3$, amiből adódóan $abc \mid b^{13}$. (Hasonló gondolatmenet érvényes $l = 0$ esetén is.)

b) Ha $1 \leq k$ és $4 \leq l < 13$, akkor $a^k b^l = a^k \cdot b^{l-3} \cdot b^3$, ami a (2) feltétel miatt osztható abc-vel.

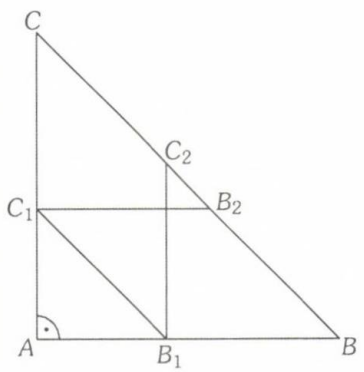
c) $10 \leq k \leq 12$ és $1 \leq l \leq 3$ esetén $a^k b^l = a^9 \cdot a^{k-9} \cdot b^l$, ami az (1) és (2) feltételek alapján abc többszöröse.

Minden esetet végignéztünk, így a feladat állítását beláttuk.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 8.

242. Egy egységnyi befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögvonal minden egyes pontját kiszínezzük négy különböző szín valamelyikével. Mutassuk meg, hogy van a háromszögvonalon két olyan pont, amelyek azonos színűek, és távolságuk legalább $2-\sqrt{2}$!



1. ábra

Megoldás: Az állítást indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy van olyan színezése a háromszögvonal pontjainak, hogy ezzel a színezéssel nincs az állításnak megfelelő pontpár.

Az *1. ábrán* látható B_1, B_2, C_1, C_2 pontokra teljesül, hogy

$$BB_1 = BB_2 = CC_1 = CC_2 = 2-\sqrt{2}\,.$$

Ekkor $AB_1 = AC_1 = \sqrt{2}-1$, és Pitagorasz tétele alapján $B_1C_1 = 2-\sqrt{2}$. Ezekből, és a megfelelő szakaszok párhuzamosságából adódik, hogy a $BB_2C_1B_1$ és $CC_1B_1C_2$ négyszögek $2-\sqrt{2}$ oldalú rombuszok.

Indirekt feltevésünknek megfelelően színezve, az A, B és C pontok páronként különböző színűek, hiszen bármelyik kettő távolsága nagyobb $2-\sqrt{2}$-nél. Jelölje az A színét a, a B színét b, a C színét c, a negyedik szín pedig legyen d. Vizsgáljuk meg, hogy a másik négy kitüntetett pont milyen színű lehet.

Mivel az AC_2C háromszögben $C_2C = 2-\sqrt{2}$ a legrövidebb oldal, ezért C_2 színe csak d lehet. Hasonló okok miatt B_2 színe is d.

B_1 színe csak a lehet, ugyanis $B_1B = B_1C_2 = 2-\sqrt{2}$, és $B_1C > 2-\sqrt{2}$ (a „45°-os" $CC_1B_1C_2$ rombusz hosszabb átlója).

Hasonló indoklás alapján adódik, hogy C_1 színe is csak a lehet, ami azt jelenti, hogy ellentmondásra jutottunk, ugyanis $B_1C_1 = 2-\sqrt{2}$.

Ezzel az állítást beláttuk.

Több megoldás alapján

Megjegyzés: Ha az eredeti állításban a „legalább $2-\sqrt{2}$" helyett a „nagyobb, mint $2-\sqrt{2}$" kitétel szerepelne, akkor az így kapott új állítás már nem lenne igaz. Ez könnyen látható, ha az *1. ábrán* a CC_1 és CC_2 szakaszokat pirosra, az AC_1 és AB_1 szakaszokat kékre, a BB_1 és BB_2 szakaszokat zöldre, a B_2C_2 szakaszt pedig sárgára festjük úgy, hogy azonos színű szakaszok közös végpontja a szakaszok színével, különböző

színű szakaszok közös végpontja pedig akár az egyik, akár a másik szakasz színével azonos.

Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 8.

243. Az $\{a_n\}$ szigorúan növekvő sorozat pontosan azon pozitív egész számokból áll, amelyek sem nem négyzetszámok, sem nem köbszámok. Határozzuk meg a sorozat 2004-edik tagját!

Megoldás: Mivel $\left[\sqrt{2004}\right] = 44$, $\left[\sqrt[3]{2004}\right] = 12$, és $\left[\sqrt[6]{2004}\right] = 3$, ezért a sorozatban a 2004. tagig $44 + 12 - 3 = 53$ pozitív egész nem szerepel. Mivel $53 > 21$, és a 2025 négyzetszám, ezért $a_{2004} = 2004 + 54 = 2058$.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 9.

244. Periodikus-e a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \sum_{k=1}^{2004} \cos\left(x\sqrt{k}\right)$ függvény?

Megoldás: Belátjuk, hogy az $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos\left(x\sqrt{k}\right)$ függvény semelyik 2-nél nem kisebb egész n esetén sem periodikus.

Állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy f periodikus. Ez azt jelenti, hogy van olyan p pozitív valós szám, hogy $f(x + p) = f(x)$ bármely valós x esetén. Ennek értelmében, mivel $f(0) = n$, ezért $f(p) = n$, azaz van olyan 0-tól különböző valós szám, ahol a függvény értéke n. Az összeg egyik tagja sem nagyobb 1-nél, ezért $\cos\left(p\sqrt{k}\right) = 1$ bármely 1-nél nem kisebb és n-nél nem nagyobb egész k esetén. A $k = 1$ esetből adódik, hogy $p = 2l\pi$, a $k = 2$ esetből pedig, hogy $p\sqrt{2} = 2m\pi$ alkalmas l és m pozitív egészekre. A két egyenlőséget összevetve kapjuk, hogy $\sqrt{2} = \frac{m}{l} \in \mathbb{Q}$, ami ellentmond annak, hogy $\sqrt{2}$ irracionális szám.

A kapott ellentmondás azt jelenti, hogy f nem periodikus.

Több megoldás alapján

Megjegyzés: Általánosan érvényes a következő tétel: Ha $f_1, f_2, \ldots, f_n$ $(n \geq 2)$ a valós számok halmazán értelmezett, nem állandó, folytonos, periodikus függvények, akkor az $S_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ függvény akkor és csak akkor periodikus, ha az f_k függvények periódusai páronként összemérhetők. (A tétel és bizonyítása megtalálható pl. a *Matematikai Lapok, Kolozsvár* 5/1989. számában Tuzson Zoltán *Folytonos periodikus függvények összegének periodikusságáról* című cikkében.)

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A megoldók száma: 7.

A megoldók névsora: Csorba Ferenc, Győr (240., 243.); Dályay Pál Péter, Szeged (240-244.); Kamarás Lajos, Pécs (240-244.); Kiss Zoltán, Pécs (240-244.); Nagy Béla, Sarkad (240-244.); Rakonczai György, Budapest (240-244.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (240-244.); Zachar Zoltán, Tatabánya (240-244.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár (240-243.).

NAT 2003
AJÁNLOTT TANTERV

A közoktatásról szóló törvény szerint 2004-ben az iskolák új pedagógiai programot, illetve a NAT 2003 alapján helyi tantervet készítenek. Az iskola az oktatási miniszter által kihirdetett kerettantervek alapján elkészítheti helyi tantervét. A Mozaik Kiadó által készített kerettantervrendszert az OM akkreditálta, és nyomtatásban megjelent a 17/2004. (V. 20.) rendelet mellékleteként az Oktatási Közlöny 2004/68. számának 593-1488. oldalán. A kerettanterv letölthető az OM honlapjáról, valamint a www.mozaik.info.hu címről.

MOZAIK – NAT 2003
Kerettantervrendszer
www.mozaik.info.hu

A SZÉP MAGYAR KÖNYV VERSENY
TÖBBSZÖRÖSEN DÍJAZOTT SOROZATA

MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

2 x

Egyenestartó leképezések

(Erben Péter)

A nem periodikus Penrose-csempézés

(Csonka Dorottya)

A hatalom Shapley–Shubik-féle indexéről

(Csete Lajos)

A Pitagorasz-tétel egy nem közismert általánosítása

(Dr. Darvasi Gyula)

XII. ÉVFOLYAM 2004 5

MOZAIK

www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó:
Török Zoltán
Tördelőszerkesztő:
Kovács Attila
Borítóterv:
Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj:
1350 Ft
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltban:
Budapest VIII., Üllői út 70.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Egyenestartó leképezések
Erben Péter
tanár, Budapest

A nem periodikus Penrose-csempézés
Csonka Dorottya
tanár, Budapest

Egy kísérlet tanulságai; kooperatív és versengő stratégiák alkalmazása a szöveges feladatok tanítása során kilencedik osztályban
Székely Györgyi
tanár, Budaörs

A hatalom Shapley–Shubik-féle indexéről
Csete Lajos
tanár, Markotabödöge

A Pitagorasz-tétel egy nem közismert általánosítása
Dr. Darvasi Gyula
főiskolai docens, Nyíregyháza

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Erben Péter

Egyenestartó leképezések

1. Bevezetés

Az euklideszi szerkesztések témakörének érdekes alfejezete foglalkozik a csak vonalzóval elvégezhető szerkesztési problémák elemzésével. Általában egyélű, beosztás nélküli, végtelen hosszú „vonalzó" használatát engedjük meg ezekben a szerkesztési feladatokban.

Nem vizsgáljuk azt a kérdést, hogy mely szerkesztési feladatok oldhatók meg csak vonalzót használva, erről [3]-ban olvashatunk. Célunk annak bemutatása, hogy egyszerű szerkesztési feladatokból kiindulva, hogyan juthatunk el az egyenestartó leképezések néhány alapvető tulajdonságáig.

2. Szerkesztés csak vonalzóval

A következő síkbeli szerkesztések elvégzéséhez egy beosztás nélküli egyélű vonalzót használhatunk.

2.1. feladat. Adott két párhuzamos egyenes és az egyiken egy szakasz. Felezzük meg a szakaszt!

Megoldás. Felveszünk egy P pontot a két egyenesen kívül és összekötjük a szakasz végpontjaival. A keletkezett trapéz átlóinak metszéspontját P-vel összekötő egyenes felezi az eredeti szakaszt.

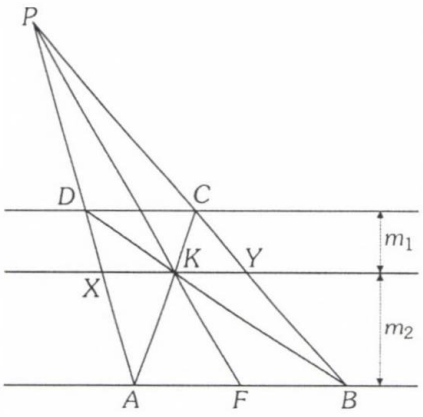
A szerkesztés helyességének igazolásához húzzunk párhuzamost az átlók K metszéspontján át az alapokkal. Ez a párhuzamos a szárakat X és Y pontokban metszi.

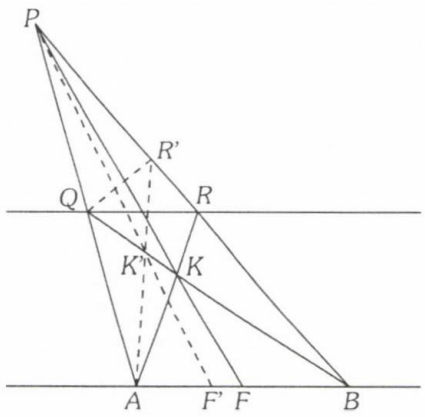
Az $ACB_\triangle \sim KCY_\triangle$ és $ADB_\triangle \sim XDK_\triangle$ hasonlóságokból $\frac{XK}{AB} = \frac{m_1}{m_1+m_2} = \frac{KY}{AB}$, vagyis $XK = KY$. Végül $PXY_\triangle \sim PAB_\triangle$ hasonlóság miatt $1 = \frac{XK}{KY} = \frac{AF}{FB}$, tehát F valóban felezőpont.

2.2. feladat. Adott egy egyenes, rajta egy szakasz a felezőpontjával és egy egyenesen kívüli pont. Szerkesztendő párhuzamos az adott egyenessel az adott ponton át.

Megoldás. Az előző szerkesztés ötletét használjuk. Legyen a szakasz AB, felezőpontja F, a külső pont Q. Az AQ meghosszabbításán felvesszük P-t. QB és PF metszéspontja K. AK és PB metszéspontja R. A keresett párhuzamos QR.

Ha ugyanis QR nem lenne párhuzamos AB-vel, akkor a PB szakaszon lenne egy R-től különböző R' pont, amire $QR' \parallel AB$. Ez azt jelen-





tené, hogy AR' és QB K' metszéspontja különbözik K-tól, tehát PK' és AB F' metszéspontja különbözik F-től. Ez azonban lehetetlen, hiszen (2.1.) miatt F' felezi AB-t.

Az első két példa azt mutatja, hogy két párhuzamos egyenes megadása, illetve egy szakasz és felezőpontjának megadása azonos információt jelent a csak vonalzós szerkesztések világában. Kicsit pontosabban: ha adott két párhuzamos, akkor az irányukkal párhuzamos szakaszok megfelezhetők csak 2 vonalzóval (hogyan?), ha pedig adott egy szakasz a felezőpontjával, akkor párhuzamost tudunk szerkeszteni vele tetszőleges ponton át.

A következő két feladat nem jelenthet nehézséget, az eddigiek után:

2.3. feladat. Adott két párhuzamos egyenes és rajtuk kívül egy pont. Szerkesztendő párhuzamos az egyenesekkel az adott ponton át.

Megoldás. Az egyik egyenesen felveszünk egy tetszőleges szakaszt és (2.1.) alapján megfelezzük. Ezzel létrehoztuk a (2.2.)-ben leírt szerkesztés feltételeit.

2.4. feladat. Egy adott négyzet egyik oldalának belső pontja P. Szerkesztendő olyan téglalap, melynek egyik csúcsa P, csúcsai a négyzet oldalaira esnek, és oldalai párhuzamosak a négyzet átlóival.

Megoldás. Legyen P az $ABCD$ négyzet AB oldalának belső pontja. A négyzet O középpontja az átlók metszéspontjaként szerkeszthető. Mivel O felezi az átlókat, P-n át mindkét átlóval tudunk párhuzamost szerkeszteni. Ezek a párhuzamosok kimetszik a négyzet oldalaiból a keresett téglalap két csúcsát, a negyedik csúcs pedig OP és CD metszéspontja.

A szakaszfelezés után további aritmetikai műveletek megszerkesztésével foglalkozunk.

2.5. feladat. Adott két párhuzamos egyenes és az egyiken egy szakasz. Duplázzuk meg a szakaszt!

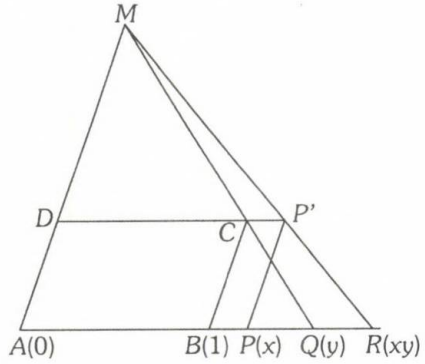
Megoldás. Az AB-t nem tartalmazó egyenesen megfelezünk egy tetszőleges PQ szakaszt, a felezőpont F. Ha AP és BF metszéspontja M, akkor MQ egy olyan C pontban metszi AB egyenesét, amire $AC = 2AB$. (Mindig fel tudjuk úgy venni a PQ szakaszt, hogy M létrejöjjön.) Állításunk az $MPQ_\triangle \sim MAC_\triangle$ hasonlóság következménye.

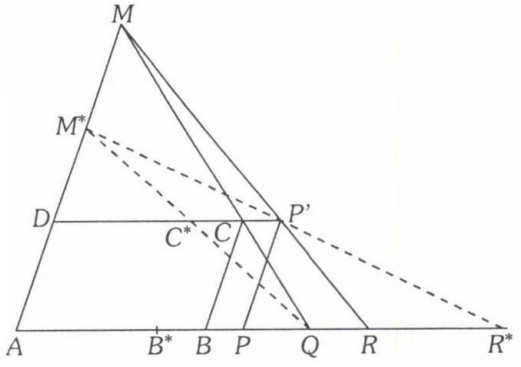
2.6. feladat. Az előző feladat feltételeivel szerkesszük meg egy szakasz n-szeresét és n-ed részét, ha n tetszőleges pozitív egész.

Megoldás. Az n-szerezés ismételt duplázással elvégezhető. Az osztás a következő módon kivitelezhető: Az AB szakaszt nem tartalmazó egyenesen egy P_0P_1 szakaszból kiindulva, ismételt duplázással megszerkeszthetők a P_2; P_3; ...; P_n pontok, melyekre $P_0P_1 = P_1P_2 = ... = P_{n-1}P_n$. Ha P_0A és P_nB metszéspontja M, akkor a P_iM egyenesek n egyenlő részre bontják az AB szakaszt.

2.7. feladat. Adott egy $ABCD$ paralelogramma és AB egyenesén az x és y koordinátájú P és Q pontok. (Az A pont a 0 és a B pont az 1.) Szerkesztendő $x + y$ és xy.

Megoldás. (a) *Összeadás.* A PQ szakasz F felezőpontja szerkeszthető, F koordinátája $\frac{x+y}{2}$. Az AF szakasz duplázásával megkapjuk az $x + y$ koordinátájú pontot.





(b) *Szorzás.* Feltételezzük, hogy $x, y > 0$, a többi esetet az előjelvizsgálat után egy szakaszmásolással intézhetjük el. Ha $Q = B$, akkor $xy = x$, nincs dolgunk. Egyébként QC egy M pontban metszi AD-t. P-n át párhuzamost húzunk BC-vel, ez P'-ben metszi CD-t. MP' és AB metszéspontja R. Az M középpontú hasonlóság alapján $\frac{DC}{AQ} = \frac{DP'}{AR} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x}{AR} \Rightarrow AR = xy$.

Érdemes megjegyezni, hogy az összeadás eredménye nem függ az egység megválasztásától, hiszen a szerkesztésben nem használtuk a B pontot. A szorzás eredménye ezzel szemben egységfüggő, ha rögzített P, Q esetén csökkentjük az egységet, vagyis B közeledik A-hoz, akkor R távolodik A-tól.

3. Osztóviszony és kettősviszony

Ha rögzítjük egy egyenes A és B pontját, akkor az egyenes tetszőleges $P \neq B$ pontjának helyzetét jellemezhetjük a PA és PB távolságok arányával.

Definíció. Ha A, B és P egy egyenes pontjai ($P \neq B$), akkor az

$$(ABP) = \frac{AP}{PB}$$

arányt *osztóviszonynak* nevezzük.
Itt AP és BP előjeles távolságok, az egyenes valamelyik irányítása szerint. Látható, hogy az osztóviszony független attól, melyik irányítását választjuk az egyenesnek.

3.1. Állítás. Ha P befutja az AB egyenest, akkor (ABP) a -1 kivételével minden valós értéket pontosan egyszer vesz fel.

Bizonyítás. Legyen $AB = d > 0$ és $AP = x$. Ekkor $PB = d - x$ és $(ABP) = \frac{x}{d-x}$. Az $\frac{x}{d-x} = r$ egyenlet pontosan akkor oldható meg, ha $r \neq -1$, ekkor $x = \frac{d}{1+r}$. A megoldás egyértelmű.

Érdemes felrajzolni, hogyan felelteti meg az AB egyenes P pontjait az osztóviszony a valós számoknak.

Látható, hogy $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{d-x} = -1$ miatt az egyenesen a „végtelen felé tartva" az osztóviszony értéke -1-hez tart.

Ha adott két egyenes (e és f), továbbá egy velük nem párhuzamos $\mathbf{v}$ irány, akkor a $\mathbf{v}$-vel párhuzamos vetítés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít e és f pontjai között.

3.2. Állítás. Két egyenes pontjai között a párhuzamos vetítés osztóviszonytartó megfeleltetés.

Bizonyítás. Állításunk a párhuzamos szelők tételének átfogalmazása.

Definíció. Ha A, B, C, D egy egyenes pontjai, akkor az

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}$$

arányt a négy pont *kettősviszonyának* nevezzük.

Az osztóviszonyra kimondott tulajdonság következménye, hogy ha A, B, C egy egyenes három különböző pontja, akkor az $(ABCD)$ kettősviszony értéke egyértelműen meghatározza D helyzetét.

3.3. Állítás. $(ABCD) = \frac{1}{(BACD)}$

Bizonyítás. Állításunk a definícióból egyszerű számolással adódik.

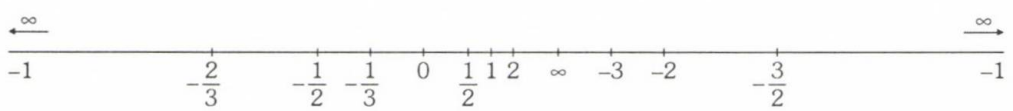
3.4. Állítás. (Papposz–Steiner-tétel) Ha egy e egyenes A, B, C, D pontjait egy P pontból az f egyenes A', B', C', D' pontjaiba vetítjük, akkor

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

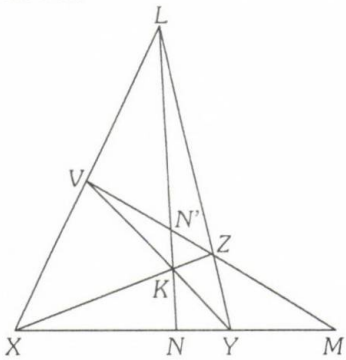
(Feltesszük, hogy P nem illeszkedik az e és f egyenesekre.)

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható például [4.]-ben.

A Papposz–Steiner-tétel fontos következménye az alábbi állítás:



3.5. Állítás. Ha az $XYZV$ négyszög XV és YZ oldalának metszéspontja L, XY és ZV oldalának metszéspontja M, átlóinak metszéspontja K, akkor az LK szakasz olyan N pontban metszi az XY egyenest, melyre $(XYNM) = -1$. Azt mondjuk, hogy X és Y *harmonikusan* választja el N-et és M-et.



Bizonyítás. Jelölje LK és VZ metszéspontját N'. A (3.4.) tételt először az L, majd a K pontból történő vetítésre alkalmazva:

$$(XYNM) = (VN'ZM) = (YXNM) = \frac{1}{(XYNM)}.$$

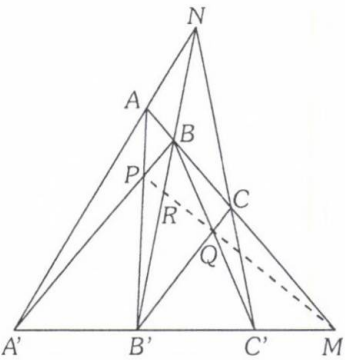
Innen $(XYNM)^2 = 1$, vagyis $(XYNM) = \pm 1$. Mivel $(XYNM) = 1$-ből $N = M$ következne, csak az lehet, hogy $(XYNM) = -1$.

Térjünk most vissza a (2.1.)-es feladathoz. Ha az AB és CD párhuzamos egyenesek metszéspontjának az AB egyenes „végtelen távoli pontját" tekintjük (amit e_∞-nel jelölünk), akkor $(ABFe_\infty) = \frac{(ABF)}{(ABe_\infty)} = \frac{1}{-1} = -1$. Tehát a (2.1.)-beli konfiguráció felfogható úgy, mint (3.5.) elfajuló esete.

Elméleti tudásunk most már elegendő a következő feladat megoldásához:

3.6. feladat. Egy papírlapon megrajzoltuk az e és f metsző egyeneseket, továbbá egy P pontot. Sajnos a papírról leszakadt egy az egyenesek metszéspontját is tartalmazó darab. Szerkesztendő csak vonalzóval a P-t az egyenesek metszéspontjával összekötő egyenes.

Megoldás. Legyen a két egyenes AM és $A'M$. Az alábbi ábra egy lehetséges megoldást mutat.



Az $A'B'BA$, illetve $B'C'CB$ négyszögekre alkalmazva a (3.6.) állítást azt kapjuk, hogy MQ és MP olyan R_1 és R_2 pontban metszi BB'-t, melyekre $(B'R_1BN) = (B'R_2BN) = -1$. Ez csak úgy lehetséges, ha $R_1 = R_2 = R$, tehát M, Q, R és P egy egyenesen vannak.

4. Az affin transzformáció

Definíció. Egy sík önmagára (vagy egy másik síkra) való kölcsönösen egyértelmű egyenestartó leképezését *affin transzformációnak* nevezzük.

Az egyenestartás azt jelenti, hogy kollineáris (egy egyenesre eső) pontok képe is kollineáris. Az egybevágóságok és hasonlóságok nyilván affinitások. Affinitás továbbá két sík közötti párhuzamos vetítés is, hiszen egyenestartó és kölcsönösen egyértelműen felelteti meg egymásnak a két sík pontjait, ha a vetítés iránya nem párhuzamos egyik síkkal sem.

4.1. Állítás. A síkbeli affinitások csoportot alkotnak a kompozíció műveletével.

Bizonyítás. Két bijektív transzformáció szorzata is bijektív, és két egyenestartó transzformáció szorzata is egyenestartó, tehát affinitások szorzata is affinitás. A függvénykompozíció (mint szorzás) mindig asszociatív, az affinitások esetében is. Az egységelem az identitás. Hátra van még annak igazolása, hogy egy affinitás inverze is affinitás. Ehhez azt kell megmutatni, hogy ha A, B, C három nem kollineáris pont, akkor A', B', C' képeik sem eshetnek egy egyenesre.

Indirekt tegyük fel, hogy A', B', C' egy e egyenesre illeszkedik. Legyen D' egy e-re nem

illeszkedő pont. Legyen D az a pont, melynek képe az affinitásnál D'. Hol lehet D?

Az rögtön látható, hogy D nem eshet az ABC háromszög oldalegyeneseire, mert akkor D' e-n lenne. Feltehető, hogy AD metszi BC-t egy M pontban. (Ha $AD \parallel BC$, akkor A szerepét B vagy C veszi át.) Mivel M rajta van BC-n, képe M' rajta van e-n. De ekkor D' illeszkedik $A'M'$-re, vagyis e-re, ami ellentmond feltevésünknek.

Az affinitást ponttranszformációként értelmeztük, de a (4.1.) állítás alapján mondhatjuk azt, hogy egy e egyenes képe egy e' egyenes. Ugyanis e minden pontjának képe egy e' egyenesre illeszkedik, továbbá e' minden pontja e valamelyik pontjának képe.

4.2. Állítás. Az affinitás illeszkedéstartó és párhuzamosságtartó.

Bizonyítás. Az előbbiek alapján egy pont csak akkor illeszkedik egy egyenesre, ha képe illeszkedik az egyenes képére. Ha két egyenes párhuzamos, akkor képük nem lehet metsző, mert a metszéspont őse az eredeti egyenesek mindegyikén rajta lenne.

4.3. Állítás. Ha adott egy síkban az ABC és $A'B'C'$ háromszög, akkor létezik pontosan egy affinitás, ami ABC-t $A'B'C'$-be viszi.

Bizonyítás. (a) *Létezés.* Megmutatjuk, hogy ha adott egy ABC és egy $A'B'C'$ háromszög az S síkon, akkor található olyan f affinitás, melynél $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$. Megkonstruáljuk a keresett f függvényt. Az ABC háromszöget egy hasonlósággal átvihetjük $A'B'C''$-be. Ha $C' = C''$, kész vagyunk. Ha nem, akkor S „másolatát" elforgatjuk $A'B'$ körül. Így A' és B' helyben marad, C'' pedig egy C''' pontba megy át. Végül a $C'''C'$ irányban S-re vetítjük az elforgatott síkot. Mindhárom művelet affinitás volt, tehát valóban egy affinitást adtunk meg.

(b) *Egyértelműség.* Bebizonyítjuk, hogy egyetlen olyan affinitás van, ami egy adott háromszöget egy megadott képháromszögbe visz. Ha lenne kettő, f és g, akkor a $g^{-1} \circ f$ nem identikus transzformáció három nem kollineáris pontot fixen hagyna. Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen.

Tegyük fel, hogy egy nem identikus affinitásnál $A' = A$, $B' = B$, $D' = D$. Az affinitás párhuzamosságtartó, tehát az $ABCD$ paralelogramma egy $A'B'C'D'$ paralelogrammába megy át. Ez csak úgy lehet, ha $C' = C$ is teljesül. Az AB egyenes pontjait az AB egyenes pontjaiba viszi a leképezés. Legyen A a 0, B pedig az 1 koordinátájú pont, ekkor az affinitás egy $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt definiál az AB egyenes pontjain, melyre $f(0) = 0$ és $f(1) = 1$.

(b1) Belátjuk, hogy $f(x) + f(y) = f(x + y)$ és $f(x) \cdot f(y) = f(xy)$.

Képzeljük el a (2.7.)-ben leírt szerkesztés ábráját! Legyen az AB egyenes három pontja $P(x)$, $Q(y)$ és $R(x + y)$. Az affinitásnál a $P'(f(x))$, $Q'(f(y))$ és $R'(f(x + y))$ pontokat kapjuk a P, Q, R pontokból. Vegyük észre, hogy a (2.7.) szerkesztés csak egyeneseket és metszést használt, az $ABCD$ paralelogramma fix, vagyis a szerkesztés egyenesei olyan egyenesekbe mentek át, melyek $P'(f(x))$-ből és $Q'(f(y))$-ból meghatározzák $R'(f(x) + f(y))$-t. Ez pedig azt jelenti, hogy $f(x) + f(y) = f(x + y)$. A szorzás ugyanígy megy.

(b2) Megmutatjuk, hogy $f(x) = x$, minden x-re.

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $f(n) = f(1 + \ldots + 1) = f(1) + \ldots + f(1) = n$.

Ha $z \in \mathbb{Z}$, $z < 0$, akkor $0 = f(0) = f(z + (-z)) = f(z) + f(-z) = f(z) - z \Rightarrow f(z) = z$.

Ha $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{p}{q}$, akkor $p = f(p) = f\left(\frac{p}{q} \cdot q\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) \cdot f(q) = f\left(\frac{p}{q}\right) \cdot q \Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$.

Végül $f(x^2) = (f(x))^2$ miatt f a pozitív számokon nemnegatív, az additivitás miatt így monoton növő.

Tehát $f(x)$-nek minden racionális x fixpontja és f monoton növő. Ez csak úgy lehetséges ha $f(x) = x$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

(b3) Azt kaptuk, hogy AB minden pontja fix. Hasonlóan AD is csupa fixpontot tartalmaz.

Legyen most P tetszőleges pont. Fektessünk P-n át párhuzamosokat AB-vel és AD-vel, messék ezek a párhuzamosok AB-t és AD-t P'-ben és P''-ben. Ekkor A, P' és P'' fix, ami csak úgy lehet, ha P is fix. Ez ellentmond indirekt feltevésünknek.

Végezetül megjegyezzük, hogy az affin transzformációk megőrzik az osztóviszonyt és a területarányt, emiatt jól alkalmazhatók olyan problémák megoldásában, melyek ezen *affin invariáns* tulajdonságokkal foglalkoznak.

Irodalomjegyzék

[1] Coxeter H. S. M., A geometriák alapjai, Műszaki könyvkiadó, 1987

[2] Csikós B., Re: Affin transzformációk, email

[3] Czédli G. – Szendrei Á., Geometriai szerkeszthetőség, POLYGON, 1997

[4.] Hajós Gy., Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, 1987

[5.] Reiman I., A geometria és határterületei, Gondolat, 1986

[6.] Smogorzhevskii A. S., The Ruler in Geometrical Constructions, Blaisdell Publishing Company, 1961

[7.] Szilassi L., Affinitás, Elektronikus jegyzet

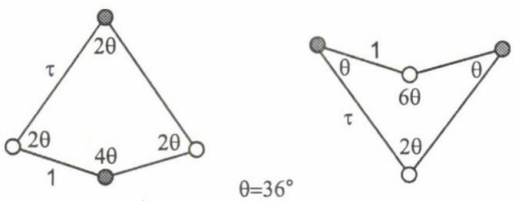
[8.] Yaglom I. M., Geometric Transformations III., MAA, 1989

Csonka Dorottya

A nem periodikus Penrose-csempézés

Periodikusan csempézett felületekkel vagyunk körülvéve. Ezt látjuk, ha az utcán a lábunk alá pillantunk, vagy figyelmesebben megnézzük fürdőszobánk falát. És persze M. C. Escher gyönyörű alkotásairól sem felejtkezhetünk el. Forgatási, eltolási szimmetriák tanításához érdemes elővenni ezeket. Könnyedén megtalálhatjuk rajtuk azt a legkisebb tartományt, melyet eltologatva az egész mintázatot előállíthatjuk. Ekkor azt mondjuk, hogy a csempézés periodikus.

A hetvenes évek végén Roger Penrose, az oxfordi egyetem matematikaprofesszora, feltalált két csempét, mellyel a síkot csak nem periodikusan fedhetjük le. A cikkben ezt a tulajdonságot szeretnénk bebizonyítani. (A nem periodikus csempézések történetéről és a Penrose-csempézés tulajdonságairól magyarul [1]-ben olvashatunk többet. A cikk összefoglaló jellegű, bizonyítások nem, vagy csak vázlatosan szerepelnek benne.)



1. ábra
Sárkány és dárda

Az *1. ábrán* lévő konvex csempét sárkánynak, a konkávot pedig dárdának hívjuk. Ha megengednénk, hogy a dárda konkáv csúcsához a sárkány tompa szögét illesszük, akkor a két csempe periodikusan fedné le a síkot. Ennek elkerülése végett bevezetünk egy *szabályt*: két él csak akkor érintkezhet, ha a végpontjaikban azonos a csúcsok színezése.

Érdemes a csempéket kivágni. Ne sajnáljuk az időt, mert miközben próbálunk szabályosan csempézni, sok érdekes tulajdonságra rájöhetünk. És nem utolsó sorban rendkívül szép ábrákat kapunk!

Műveletek

A sík csempézésén értelmezhetünk műveleteket is. A *felfújás* művelete alatt a következőt értjük: Vágjuk ketté a szimmetriatengelyük mentén a dárdákat. Egymást a csúcsuknál érintő két fél dárdát és a mindkettővel érintkező sárkányt összeillesztve együtt egy nagyobb dárdát kapunk. Két, az oldaluknál érintkező dárda és a hozzájuk illeszkedő két sárkány együtt egy nagyobb sárkányt adnak ki (ld. *2/A ábra*).

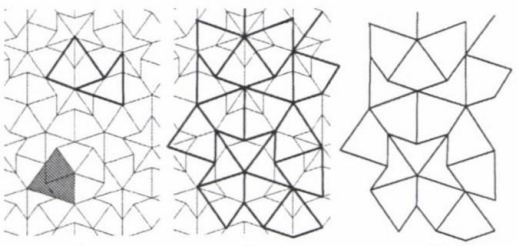
A dárda rövidebbik oldalaihoz mindig egy-egy sárkány csatlakozik. Érdemes tehát ennek

a három csempének külön nevet adni: nevezzük *ásznak* őket (ld. a *2/A ábrán* beszínezett három csempét).

A *2. ábra A* részében az eredeti csempézés egy részlete látható, *B*-ben vastagabb vonallal rárajzoltuk a felfújás után keletkezett csempéket, a *C*-ben pedig az így nyert felfújt csempézés látszik.

Felhasználva, hogy ahol dárda feltűnik, ott ász is lesz, illetve a dárdák egymáshoz való helyzetét vizsgálva belátható, hogy bármilyen csempézésből indulva a felfújás mindig elvégezhető és mindig egyértelműen végezhető el.

A felfújás inverzét *leeresztés*nek hívjuk. Példaként nézzük az ászt. *(3/A ábra)* A leeresztés műveleténél a csempékre megfelelő módon újabb szakaszokat elhelyezve kapjuk a leeresztett csempézést. Ezeket a szakaszokat szaggatott vonallal jelöltük az ábrán. Leeresztés után egy tíz csempéből álló halmazt kapunk, melynek „közepén" a kiinduló három csempe van. A fél csempéket mindenhol kiegészítjük egésszé *(3/C ábra)*. Eresszük le ezeket a csempéket is. Az így kapott halmaz „közepén" megint az előző halmazt találjuk *(3/E ábra)* és így tovább. A *4. ábra* az ász öt egymás utáni leeresztéséből származó csempehalmazokat vastag vonallal körülhatárolva, és egymásra vetítve ábrázolja.



A *B* *C*

2. ábra
Az ász és a felfújás művelete három lépésben

A felfújás gyakorlásához a csempézés képére helyezzünk átlátszó fóliát. A fólián először rajzoljuk meg filctollal a dárdák szimmetriatengelyét, majd a megfelelő sárkányokkal együtt kerítsük körbe a nagyobb csempéket. Negyed óra gyakorlás után már automatikusan fog menni a művelet. A fóliára való rajzolásnak az is előnye, hogy írásvetítővel kivetíthetjük a mintát, a műveleteket a diákok könnyebben tudják követni, és persze magyarázni is egyszerűbb.

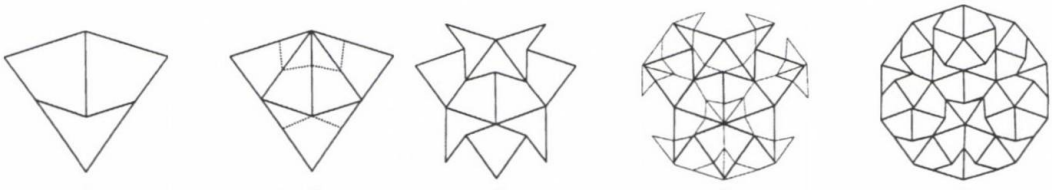
A keletkezett csempék és az eredeti csempék területének aránya $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (az aranyszám), így a felfújás után τ-szor akkora, míg a leeresztés után τ-od akkora csempéket kapunk. Ezt egyszerű számolással igazolhatjuk.

A Penrose-féle dárda-sárkány csempézés lefedi a síkot

Induljunk ki tetszőleges számú csempét tartalmazó mintázatból. Akár egy csempével is kezdhetjük. Eresszük le a csempehalmazunkat, majd nagyítsuk fel τ-szorosára. Ekkor az eredetivel megegyező méretű csempékből álló, de τ^2-szer akkora alapterületű halmazt kaptunk. Ezt a lépést tetszőlegesen sokszor ismételhetjük (ld. *4. ábra*). [2]

A Penrose-féle dárda-sárkány csempézés nem periodikus

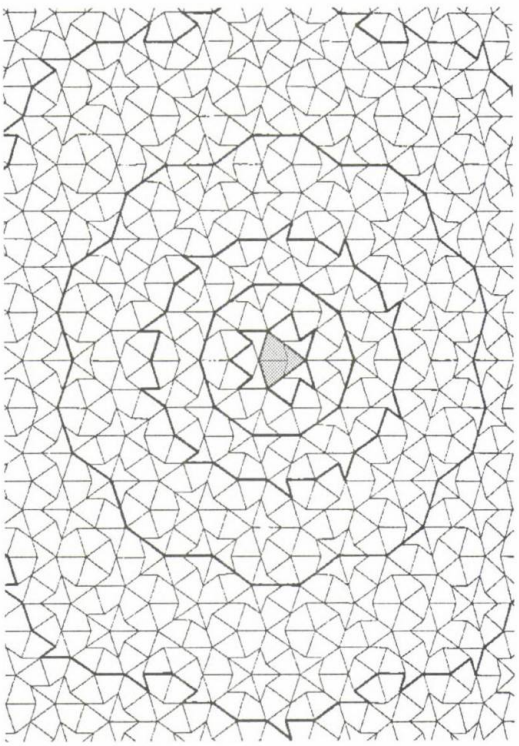
Indirekt tegyük fel, hogy egy tetszőleges Penrose-féle dárda-sárkány csempézés periodikus. Azaz létezik egy olyan legkisebb terület a csempézésben, melynek eltolásával a csempézést megkaphatjuk. Hívjuk ezt periodikus alapcellának.



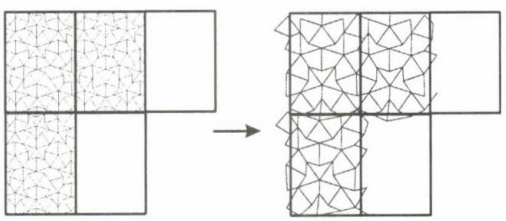
A *B* *C* *D* *E*

3. ábra
Az ász kétszeri leeresztése. A második és a negyedik ábrán berajzoltuk a leeresztés segédvonalait

Minden, az alapcella eltolásából származó, a cella nagyságával megegyező területen ugyanazok a csempék lesznek (ld. *5. ábra*). A felfújás művelete egyértelmű, ezért az egész csempézést felfújva minden cellában *ugyanazokat* a τ-szor nagyobb csempéket fogjuk kapni. Így felfújás után sem fog változni a periodikus alapcella mérete. Megfelelően sokszor elvégezve a műveletet a kapott csempék nagyobbak lesznek, mint az eredeti periodikus alapcella. Ez viszont ellentmondás, amivel bizonyítottuk az állításunkat. [2]



4. ábra
Az ász ötszöri leeresztése



5. ábra
A periodikus alapcella mérete megmarad a felfújás után

Egy másik bizonyítás a Penrose-féle csempézés nem periodikusságára

Periodikus csempézésnél a periodikus alapcellában a sárkányok és dárdák aránya szükségszerűen racionális szám, hiszen véges sokat tartalmaz a cella mindkettőből. Tetszőlegesen sokszor eltolva a cellát az arány nem változik. Vizsgáljuk tehát meg a Penrose-féle csempézésben ezt az arányt!

Vegyünk egy nagyon nagy csempehalmazt, mely egy másik csempehalmaz tetszőlegesen sokszori egymás utáni felfújásából származik. Legyen x a sárkányok (s) és dárdák (d) számának aránya: $x_n = \frac{s}{d}$. A felfújás során egy dárda és egy sárkány alkot egy nagyobb dárdát, és egy dárdából és két sárkányból jön létre egy nagyobb sárkány. Azaz a felfújt csempézésben a sárkányok és dárdák aránya az előzőhöz képest

$$x_n = \frac{d+2s}{d+s} = \frac{1+2\frac{s}{d}}{1+\frac{s}{d}} = \frac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}.$$

Minél nagyobb a terület, annál közelebb van az értéke a fenti sorozat határértékéhez, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$-hez, ami az aranyszám! Tehát végtelen csempézésnél a sárkányok és a dárdák aránya egy irracionális szám, ami lehetetlen egy periodikus csempézésnél.

Tehát beláttuk, hogy a Penrose-féle dárda-sárkány csempézés nem periodikus.

Irodalom

[1] Martin Gardner, *Penrose-csempézés*, (Török Judit fordítása), Természet Világa, 1997/8, (344-349. oldal), illetve a cikk folytatása Természet Világa, 1997/9, (396-399. oldal)

[2] B. Grünbaum and G. C. Sheperd, *Tilings and patterns,* W. H. Freeman and Co. 1987, 10.3 - 10.6 fejezet

[3] R. Penrose, *Pentaplexity,* Mathematical Intelligencer, Volume 2, 1978, (32-37. oldal)

Székely Györgyi

Egy kísérlet tanulságai; kooperatív és versengő stratégiák alkalmazása a szöveges feladatok tanítása során kilencedik osztályban

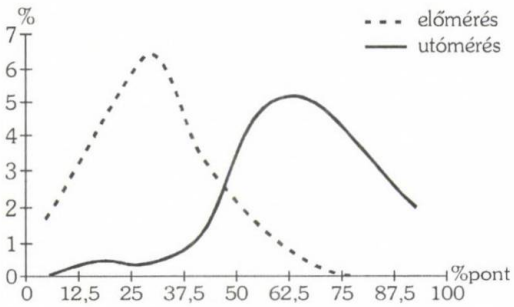
Sok éve teszem a matematikaórákat változatosabbá azzal, hogy alkalmanként csoportos módszerrel tanítok. Kooperatív és versengő elemeket is alkalmazok, a legtöbb gyerek nagyon szereti ezeket az órákat, sok pedagógiai haszna van, (különösen annál a néhány gyereknél, aki kezdetben húzódozik a csoportos munkától). Előnyei és hátrányai is vannak a csoportos módszerű tanításnak, nem alkalmazható minden órán, sőt az órák többségében nem. A különböző tantárgyaknál sem ugyanolyan mértékben alkalmazható. Hátránya, hogy ezek az órák „zajosabbak" és több energiát kell befektetnie a tanárnak. A tudás átadása itt nem csak egyirányú folyamat, amelyben a tanár ad át tudást a gyerekeknek, hanem sokirányú és sokszintű, hiszen a gyerekek egymást is tanítják. A kooperatív-versengő módszer legfőbb előnye az, hogy valós élethelyzetnek megfelelő tanulási környezetet jelent. A motívumoknak nagyobb szerepe van az ilyen órákon, mint a hagyományos oktatásban. Jók a tapasztalataim, de nem találkoztam még olyan vizsgálattal, amely mérésekkel összehasonlítaná a kooperatív-versengő módszert a hagyományos tanítással oktatás és nevelés terén. Ráadásul a szakirodalomban egyébként is kevés szó esik a középiskolákról, inkább általános iskolában alkalmazható módszereket mutatnak be. Nem eléggé terjedt el ez a módszer Magyarországon, ugyanakkor Európában és az USA-ban egyre népszerűbb a kooperatív tanulás. A téma fontosságára rávilágít az a tény is, hogy egy 2001/2002-es, ezerkétszáz iskolát érintő vizsgálat eredményei szerint az elmúlt 3-4 év során az innováció főként a pedagógiai programokra, tantervekre és az ezekkel összefüggő területekre terjedt ki (pl. minőségbiztosítás) és kisebb arányban jelentek meg változások a nevelési-oktatási módszerek tekintetében. Másrészt a magyar iskolákban a versengő módszerek háttérbe szorítják a kooperatív módszereket a 2003. évi, közoktatásról szóló jelentés szerint.

Hatékonyabb-e az oktatás a kooperatív módszerrel? Hogyan hat a tanulók szociális készségére, elsajátítási motivációjára illetve matematikai énképére a csoportos tananyag-feldolgozás? Hogyan változik a tanulók versengő és kooperatív készsége az ilyen tanórákon? E kérdések megválaszolásához egy pedagógiai fejlesztő kísérletet végeztünk kollégáimmal. A kísérleti csoportban kooperatív módszerrel tanítottunk, a kontrollcsoportban hagyományos módon sajátították el matematikai ismereteket kilencedik osztályos gimnazisták, a szöveges feladatok témakörében.

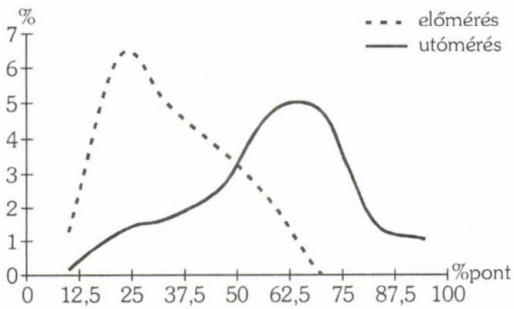
Részletes elemzést végeztem a gyerekek matematikatudása fejlődésének összehasonlítására a kísérleti és kontrollcsoportban. Megvizsgáltam, hogyan változtak a tanulók motívumai és készségei a kísérleti csoportban, e tényezők kapcsolatát, összefüggéseit egymással és a félévi osztályzatokkal. A vizsgálatok célja, hogy igazoljam kiinduló hipotéziseimet: *a kooperatív tanítás jó hatással van a gyerekek tanulási motívumaira, valamint szociális készségeire, és esetenként hatékonyabb lehet a hagyományos oktatásnál a tárgyi tudás megszerzése szempontjából.* Az

elemzések elkészítésében segített, hogy időközben elvégeztem a pedagógiai értékelési szakot.

A kísérleti és a kontrollminta összeválogatásánál szempont volt, hogy hasonló iskolatípusból, a matematikát ugyanolyan heti óraszámban tanulók legyenek a résztvevők, és hasonló képességűnek és tudásszintűnek feltételezett matematikacsoportokból kerüljenek ki. Gimnáziumi, nem matematika tagozatos, a matematikát heti három vagy négy órában tanuló kilencedikes diákok képezik a mintát. A csoportok azonos előzetes ismeretszintjében az is szerepet játszott, hogy viszonylag hamar, az első félévben végeztük el a fejlesztést. Az is fontos volt, hogy a kooperatív módszerrel tanuló csoportok ugyanabból az iskolából legyenek, ugyanis ezek tanárai folyamatosan, minden óra előtt és után egyeztették módszereiket és tapasztalataikat. Az öt kooperatív csoport az *Illyés Gyula Gimnázium* (Budaörs) három osztályából került ki, és három különböző tanár tanította őket (köztük jómagam), mindannyian több éve rendszeresen alkalmazzuk a kooperatív módszert matematikaórákon. A kontrollcsoportok közül egyik ugyanebből az iskolából, három a *Szent László Gimnázium*ból (Budapest) és egy csoport a *Bocskai István Gimnázium*ból (Hajdúböszörmény) való. A kontrollcsoportot négy tanár tanította, összesen tehát hét tanár vett részt a kísérletben.



1. ábra
A két mérőeszköz gyakorisági eloszlása a kísérleti csoportban



2. ábra
A két mérőeszköz gyakorisági eloszlása a kontroll csoportban

A matematikai ismeretek fejlődésének vizsgálatát egy elő- és egy utómérés segítségével végeztem, ehhez a mérőeszköz két ekvivalens tesztváltozat volt. Vizsgáltam a motívumok és készségek fejlődését szintén egy elő- és egy utómérés segítségével, melyhez a mérőeszköz két tanulói kérdőív volt. A fejlesztés során folyamatosan megbeszéltük a tennivalókat és a felmerülő problémákat a kísérleti és a kontrollcsoport tanáraival is, előbbiek egy tanári kérdőívben rögzítették a tapasztalataikat. A fejlesztés november közepe és december közepe között lezajlott mindegyik csoportban. Ezt az időszakot azért láttuk alkalmasnak, mert idáig az előzmények a tananyagban minden csoportnál azonosak voltak. Egyébként a második félévben szoktuk a szöveges feladatokat tanítani (az egyenletek tanítása után), azonban a kísérletben szereplő feladatok mindegyikéhez olyan egyszerű egyenleteket kellett csak megoldani, amelyhez elegendőek az általános iskolai ismeretek. (Természetesen a szöveges feladatokra a második félévben még visszatértünk az egyenletek, az egyenletrendszerek és a függvények tanításakor.)

A feldolgozásra javasolt feladatokat az *Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény I.* kötetéből és a népszerű nevén „*Sárga csíkos*" feladatgyűjteményből válogattam össze úgy, hogy elegendő számú, különböző nehézségű és megoldási sémájú feladatok legyenek mindegyik témakörhöz. Az egyes anyagrészekre javasolt óraszámot is megszabtuk. Tehát mindegyik tanár ugyanazokkal a feladatokkal, és ugyanannyi órában dolgozta fel az egyes típusfeladatokat,

sok előzetes egyeztetés után összesen 10 órában (előtteutána egy-egy órát vett még igénybe a matematikatesztek és a motivációs hátteret vizsgáló kérdőívek kitöltése).

Kezdetben megengedtük a társas kapcsolatok, barátságok alapján szerveződő csoportokat, de már itt is ügyelve arra, hogy képességeik szerint vegyesek legyenek a csoportok, tekintettel a beígért jutalomra is. Később egyre jellemzőbb volt, hogy a jó matekosok köré szerveződtek a csoportok. A csoportalakítást elsősorban a diákokra bíztuk, de szükséges volt a tanári beavatkozás is, különösen akkor, ha nem jól működött egy csoport. A csoportképzés és a tananyagfeldolgozás során is változatos módszereket alkalmaztunk a kísérleti csoportban, amelyhez elsősorban a *Kagan*-könyv ötleteiből és saját korábbi gyakorlati tapasztalatainkból merítettünk. Az értékelés módszereit sem részletezem, de ezek is sokfélék voltak: egyéni, csoportos, valamint osztályoknak szánt jutalmakkal erősítettük a kooperatív, illetve a versengő elemeket. Mindezt részletesen dokumentáltuk a tanári kérdőívekben.

Az eredmények részletes bemutatása egy szakdolgozatban megtörtént, itt csak egyes fontosabb részleteit tudom felvillantani.

A jó reliabilitású és szórású matematikatesztek a kb. 70-70 fős kísérleti és kontrollmintánál egyértelműen hatékonyabbnak mutatják a kooperatív módszert: *a kooperatív módszerrel tanított csoport szignifikánsan többet fejlődött a matematikai ismeretszerzésben a hagyományos módon tanított csoportnál* (páros t-próbát végeztem és hatásméretet számoltam). A kooperatív módszerű tanítás hatására jelentősebben megváltozott a gyerekek teljesítmény szerinti sorrendje is (korrelációk mutatják). Az *1. és 2. ábra* szemlélteti a fejlesztés hatását a tesztátlagra, illetve a *3. és a 4. ábra* az egyes csoportokra, ezeken belül az öt-öt tanulócsoportra.

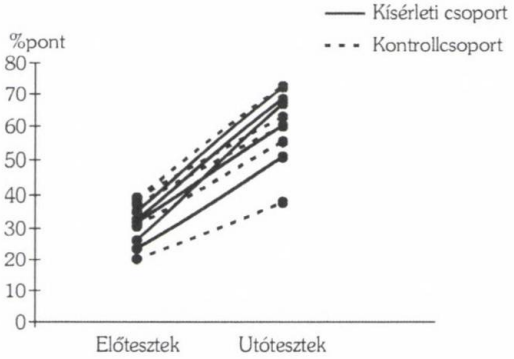
A kérdőív tételeit aszerint csoportosítottam, hogy milyen készséget vagy egyéb jellemzőt vizsgálok vele. Az így kialakult skálák: *matematikai énkép, szociális készség, elsajátítási motiváció, versengés, kooperáció*. A legtöbb kérdés zárt végű volt, amelyre öt fokozatú skálán válaszolhattak a tanulók. Összesen 72 olyan tanuló töltötte ki a kérdőíveket, aki a matematikatesztet is megírta. A közepes, illetve erős reliabilitások megfelelőek egy kérdőívre ilyen mintaelemszám esetén, így lehetőséget adnak a megbízható elemzésre. Többnyire átlagot és móduszt számoltam vagy értelemszerűen csak gyakoriságot.

Eredményeim szerint az elsajátítási motiváció kivételével mindegyik készségnél, illetve motivációnál van némi fejlődés. Azonban az elsajátítási motiváció csökkenése nem szignifikáns (amint azt a páros t-próba mutatja). Ennek el-

3. ábra

$\bar{x}_E = 30,7;\ s_E = 14,4;\ s\%_E = 47$

$\bar{x}_U = 65,4;\ s_U = 18,9;\ s\%_U = 29$



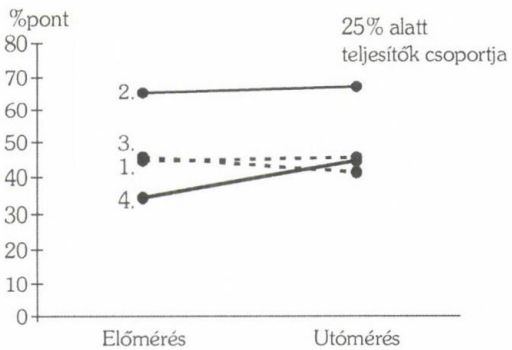
4. ábra

$\bar{x}_E = 30,4;\ s_E = 14,6;\ s\%_E = 48$

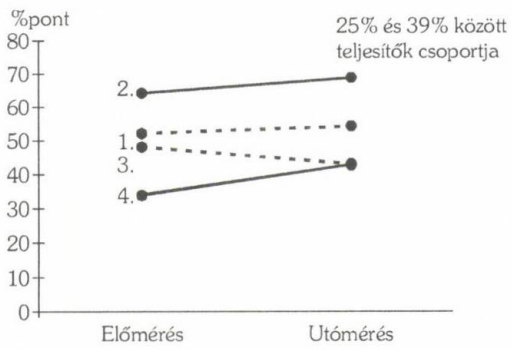
$\bar{x}_U = 56,5;\ s_U = 20,1;\ s\%_U = 36$

lenére úgy gondolom, hogy nem csupán statisztikai véletlen ez a kismértékű csökkenés. Véleményem szerint a szöveges feladatok népszerűtlenségében keresendő az ok. Ezt a hipotézisemet igazából akkor tudnám alátámasztani, ha a hagyományos módszerrel tanított gyerekek elsajátítási motivációjának – esetleg nagyobb mértékű – csökkenéséről is volnának adataim. A szöveges feladatok témakörének különlegességét és egyben nehézségét az jelenti, hogy jószerivel csak itt és a geometriában kell a gyerekeknek modellt alkotniuk, általában ezeket is érzik a legnehezebbnek, tanításuk sem könnyű. Azonban éppen a modellalkotás folyamata és az esetleges szövegértési problémák miatt választottam ezt a területet, mert ez teszi különösen alkalmassá a gyerekek egymás közti kommunikációjának fejlesztésére.

A szociális készségre kapott közepes korreláció azt mutatja, hogy a csoportos munka megváltoztatta a tanulók szociális kapcsolatrendszerét. A versengéshez való viszonyulásban, a matematikai énképben és különösen a motiváció tekintetében kevéssé változott a tanulók sorrendje a csoportos tevékenység hatására.



5. ábra



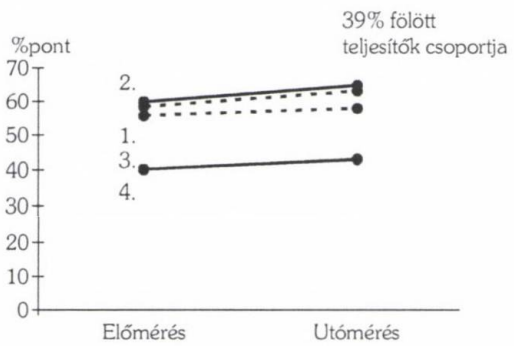
6. ábra

A szociális készség szignifikánsan javult a kooperatív munka során. A kapott adatok azt mutatják, hogy a gyerekek egymással való kapcsolatrendszerének megváltoztatásában, együttműködésük, kommunikációjuk fejlesztésében kimutatható a kísérlet eredményes fejlesztő hatása. Mivel a kooperatív és a hagyományos tanítási módszer között az egyik lényeges különbség éppen az, hogy az ismeretanyag megszerzése és a gondolkodás fejlesztése mellett egyenrangú cél a hétköznapi életben szükséges szociális készségek fejlesztése, örvendetes ez a siker. Megvizsgáltam külön is az előmérésben gyengén, közepesen illetve jól teljesítő tanulók kérdőíveit. Az előzetes matematikateszten elért teljesítmény szerint három csoportot képeztem a tanulókból, és a csoportok motivációs hátterét külön-külön megvizsgáltam illetve összehasonlítottam egymással. Három, közel egyenlő létszámú részt különítettem el a mintában. Az *5. ábra* adataiból megfigyelhető, hogy az előmérésben és az utómérésben is a matematikából jobban teljesítőknek jobb a matematikai énképe és az elsajátítási motivációja, ami teljesen érthető, hiszen a sikerélményeknek fontos a szerepe a motivációban. Logikus az is, hogy minél magasabb a matematikai teljesítmény, annál rosszabb a szociális készség, ami rászorultsági alapon működik. Nagyon érdekes eredménynek tartom, hogy míg a fejlesztés előtt a jobb teljesítményhez jobb versengő készség társult, a kooperatív fejlesztés végére a közepesen teljesítő tanulóknak a legalacsonyabb a versengő készsége. Ez az eredmény is összhangban van a hétköznapi tapasztalatokkal: a „sor elején lévők" igyekeznek megőrizni pozíciójukat, a „sor végén állók" előbbre akarnak jutni, a középen lévők nincsenek olyan éles versenyhelyzetben. Meglepő az az eredmény, hogy míg a gyengék és közepesek csoportjában is csökkent az elsajátítási motiváció, addig a jobbak elsajátítási motivációja nőtt.

Bár a kooperatív tanítás során magam is azt tapasztaltam, hogy a kooperatív-versengő módszer könnyebben működtethető a „jobb" csoportoknál, de ez csupán abból is következne, hogy jobb a matematikai énképük és (ezzel összefüggésben) az elsajátítási motivációjuk. Alighanem a társas összehasonlítás következtében javult az elsajátítási motiváció a jobbaknál és gyengült a többieknél. Érdemes volna megvizsgálni hagyományos módszerű tanításnál is ezeket a folyamatokat, ahol a társas összehasonlítás korántsem olyan intenzív és folyamatos, mint a csoportos tananyag-feldolgozásnál.

Megvizsgáltam (többváltozós lineáris regresszió analízis alkalmazásával), hogy milyen mértékben függnek a félévi osztályzatok a kísérlet előtt, illetve a kísérlet után mért motívumoktól és készségektől. A legszámottevőbb hatása a matematikai énképnek van. A tanulási énkép az iskolai eredményesség meghatározó tényezője.

Természetesen nincs egyedül üdvözítő stratégia. Mi, a fejlesztést végző tanárok, soknak éreztünk tíz csoportos órát egymás után, korábban csak egyszer-egyszer alkalmaztuk ezt a módszert a tanév során. A gyerekek is elfáradtak egy kicsit az utolsó órákra, ami érthető, hiszen sokkal tevékenyebbnek kellett lenniük, mint a hagyományos órákon. A kooperatív módszerű tanítást-tanulást tanárnak és diáknak egyaránt tanulnia kell, a módszerben gyakorlatlan tanár hatékonyabb lehet egy frontális oktatásban. Felszínre jöttek olyan közösségi és egyéni problémák, amelyek rejtve maradnak a hagyományos órákon, de a háttérben ott vannak, és hatnak a tanulás folyamatára. A kísérlet eredménye szerint az ismeretszerzésben hatékonyabbnak bizonyult a csoportos módszerű tanítás a hagyományosnál. A motívumok és készségek fejlesztésére kevés ilyen rövid idő. Ennek ellenére a szociális készségekben szignifikáns javulást sikerült elérni, tehát a kooperatív módszerű tanítás egyik legfontosabb célja megvalósult.



7. ábra
A skálák fejlődése a két kérdőívben az előmérés átlagai szerint képezett csoportokban: 1. matematikai énkép, 2. szociális készség, 3. elsajátítási motiváció, 4. versengés

Irodalom

[1] Csapó Benő (2003): *A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése.* Akadémiai Kiadó, Budapest.

[2] Golnhofer Erzsébet és Szekszárdi Júlia (2001): Az iskolák belső világa. Szocializáció, tanítás és tanulás. In: Halász Gábor és Lannert Judit (szerk.): *Jelentés a magyar közoktatásról.* 2003. OKI, Budapest. 254-264.

[3] Józsa Krisztián (2001): Az elsajátítási motiváció és a kognitív kompetencia fejlesztése. In: Csapó Benő és Vidákovich Tibor (szerk.): *Neveléstudomány az ezredfordulón.* Tankönyvkiadó, Budapest. 162-174.

[4] Kagan, S. (2001): *Kooperatív tanulás.* Ökonet Kft., Budapest.

[5] Nagy József (2000): *XXI. század és nevelés.* Osiris Kiadó, Budapest

Csete Lajos

A hatalom Shapley–Shubik-féle indexéről

1. Bevezetés

A formális politikai hatalom sem mindig arányos a rendelkezésre álló szavazatokkal.

1. példa: Egy bizottságban ketten vannak és az egyiknek 2 szavazata van a másiknak pedig 1 szavazata. A döntéshez legyen szükség egyszerű többségre. Számítsuk ki a tagok szavazási hatalmát!

Ekkor a 2 szavazattal rendelkező diktátor, míg az 1 szavazattal rendelkező jogfosztott. Hiszen a diktátor mindig keresztülviheti az akaratát, míg a jogfosztott hiába rendelkezik 1 szavazattal, soha nem érvényesítheti az akaratát. Tehát ebben az esetben a szavazatok aránya 2 : 1, míg a hatalom 100% illetve 0%, vagy 1 egész rész illetve 0 rész.

Lehet, hogy az ilyen szavazati eloszlás furcsának tűnik, de jobban hangzik annál, hogy az egyiknek 1 szavazata van, míg a másiknak 0 szavazata van, azaz nincs szavazata. Ilyen rendszerek elképzelhetők, például egy bizonyos típusú házasságban.

2. példa: Egy háromtagú bizottságban az elnöknek 2 szavazata van, míg a másik két tagnak egy-egy szavazata. A döntéshez egyszerű többség szükséges. Számítsuk ki a bizottság tagjainak szavazási hatalmát!

Megoldás: Legyen *a* az elnök, *b* illetve *c* a másik két tag. Soroljuk fel a tagok összes lehetséges sorrendjét!

abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Jelöljük meg vastagabban szedve azt a személyt, akinek a szavazata eldönti a kérdést! Méghozzá balról jobbra kezdjék leadni a szavazataikat a tagok. (Valójában mindegy, hogy tetszőleges sorrendben, illetve titkosan szavaznak a módszer szempontjából.)

*a**b**c, a**c**b, b**a**c, bc**a**, c**a**b, cb**a**.*

Láthatjuk, hogy az *a* elnök 4 esetben van kulcspozícióban, míg a *b* tag illetve a *c* tag egyaránt egy-egy esetben van kulcspozícióban.

Tehát a 6 esetből 4-szer *a* szavazata dönt, ezért azt mondjuk, hogy *a* szavazási hatalma $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, míg *b* szavazási hatalma $\frac{1}{6}$, hiszen *b* egyszer van kulcspozícióban a 6 eset közül.

Ugyanígy *c* szavazási hatalma szintén $\frac{1}{6}$. Figyeljük meg, hogy a bizottság összes hatalma $\frac{4}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$ egész, vagyis 100%. E példában a tagok szavazati aránya 2 : 1 : 1, azaz 50% : 25% : 25%. Míg a szavazási hatalmuk aránya 4 : 1 : 1, vagyis $66\frac{2}{3}\% : 16\frac{2}{3}\% : 16\frac{2}{3}\%$.

Vegyük észre, hogy a szavazási hatalom arányai jobban szétválnak, mint a szavazatszámok arányai.

A szavazati hatalom ilyetén való mérését Lloyd Shapley és Martin Shubik vezette be egy 1954-es cikkükben. [4] Ezért a szavazási hatalom ilyen módon való mértékét a hatalom Shapley–Shubik-féle indexnek nevezzük. Így *a* hatalmának Shapley–Shubik-féle indexe $SSI(a)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, hasonlóan $SSI(b)=\frac{1}{6}$ és $SSI(c)=\frac{1}{6}$.

2. A Shapley–Shubik-féle index

Eléggé világos lehet előttünk egy igen-nem szavazórendszer fogalma, de azért tekintsünk egy formális definíciót is.

1. definíció: Legyen adva az összes szavazó X halmaza. Szavazásnak nevezzük X egy A részhalmazát. Az A halmazbeli szavazók igennel szavaztak, míg a többi szavazó nemmel szavazott. Egy szavazórendszertől elvárjuk, hogy minden A szavazásra adjon pontosan egy végeredményt, vagyis döntse el, hogy elfogadták a javaslatot vagy nem. Másképpen a szavazórendszer egy $v: P(X) \to \{i, n\}$ leképezés, ahol $P(X)$ az X halmaz részhalmazainak a halmaza, és $v(A) = i$ ha $A \subseteq X$ szavazás esetén igent mond a szavazórendszer, és $v(A) = n$, ha nemet mond a szavazórendszer.

A következőkben az igen-nem szavazórendszer egy tetszőleges szavazója hatalmának egy lehetséges mértékét, az úgynevezett Shapley–Shubik-féle indexet definiáljuk.

2. definíció: Legyen p egy szavazó egy igen-nem szavazórendszerben és legyen X az összes szavazó halmaza. Rendezzük az összes lehetséges sorrendbe az X halmazt alkotó szavazókat. Kulcsszemélynek nevezzük egy ilyen sorrendben azt a szavazót, akinek a szavazata dönt, ha balról jobbra számítva adják le a szavazataikat a szavazók a sorrendekben. Ekkor a p szavazó hatalmának Shapley–Shubik-féle indexét jelöljük $SSI(p)$-vel és ez legyen egyenlő azzal az aránnyal, amit akkor kapunk, ha azon sorrendek számát, amelyben p kulcsszemély, elosztjuk az összes lehetséges sorrend számával.

Megjegyzés: Ha az X halmaz elemeinek száma n, ahol n pozitív egész, akkor az összes lehetséges sorrend, vagyis az összes permutáció száma, mint tudjuk a középiskolából $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

1. állítás: Tetszőleges p szavazó esetén $0 \le SSI(p) \le 1$.

Bizonyítás: Ez valóban fennáll, mert $0 \le SSI(p)$, hiszen e tört nevezője pozitív, míg számlálója nemnegatív. $SSI(p)$ nulla pontosan akkor lehet, ha p egyszer sem szerepel kulcspozícióban, s ekkor az $SSI(p)$ tört számlálója 0 így ekkor maga a tört is nulla.
A p szavazó legfeljebb annyiszor lehet kulcspozícióban, mint ahány lehetséges sorrend van, tehát az $SSI(p)$ tört számlálója legfeljebb akkora, mint a nevezője, ezért $SSI(p) \le 1$.
Ezzel igazoltuk az 1. állítást.

2. állítás: Ha a szavazók $p_1, p_2, \ldots, p_n$, akkor $SSI(p_1) + SSI(p_2) + \ldots + SSI(p_n) = 1$. (Vagyis az összes szavazó hatalma 1 egész, azaz 100%.)

Bizonyítás: Legyen a p_1 szavazó k_1 darab sorrendben kulcspozícióban, legyen a p_2 szavazó k_2 sorrendben, s így tovább a p_n szavazó legyen k_n sorrendben kulcspozícióban. Ekkor $SSI(p_1) = \frac{k_1}{n!}$, $SSI(p_2) = \frac{k_2}{n!}$, ..., $SSI(p_n) = \frac{k_n}{n!}$.
Vegyük észre, hogy $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = n!$, hiszen ha tekintjük az összes sorrendet és megszámoljuk, hogy az egyes sorrendekben ki van kulcspozícióban, akkor az egyes szavazók kulcspozícióinak összege éppen az összes sorrend darabszáma.

$$SSI(p_1) + SSI(p_2) + \ldots + SSI(p_n) =$$
$$= \frac{k_1}{n!} + \frac{k_2}{n!} + \ldots + \frac{k_n}{n!} = \frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Ezzel igazoltuk a második állítást.
Intuitív módon érezhetjük, hogy $SSI(p)$ megadja a p szavazó hatalomból való valamiféle részesedésének az arányát.
A 2. példát módosítsuk úgy, hogy a döntéshez többre legyen szükség, mint egyszerű többség.

3. példa: Egy háromtagú bizottságban az elnöknek 2 szavazata van, míg a másik két tagnak egy-egy szavazata. Egy javaslat eldöntéséhez $\frac{2}{3}$-os többségre van szükség, vagyis legalább $\frac{2}{3}$ rész igen szavazatra. Számítsuk ki a bizottság tagjainak szavazási hatalmát!

Megoldás: Legyen *a* az elnök, *b* illetve *c* a másik két tag. Soroljuk fel a tagok összes lehetséges sorrendjét és jelöljük meg a sorrendekben a kulcsszemélyeket!

abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Tehát $SSI(a)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $SSI(b)=\frac{1}{6}$, $SSI(c)=\frac{1}{6}$.

A hatalom eloszlása ugyanaz, mint a 2. példában. Így az elnök nagylelkűen azt is megengedheti ilyen rendszer esetén, hogy a bizottságban lemond az egyszerű többségi szabályról és azt mondja, hogy az új szabály legyen a kétharmados többség. Ez a másik két tag számára látszólag kedvező változás, de valójában Shapley–Shubik-féle hatalmi indexük változatlan marad. Vegyük észre, hogy a hatalmi index még akkor is változatlan marad, ha a kétharmados többséget úgy értelmezzük, hogy a kétharmadot valamennyivel meg kell haladnia a szavazatok arányának.

Ha háromnegyedes szükséges döntési arányt írunk elő ebben a példában, akkor még mindig nem változik, meg az egyes tagok hatalmi indexe. Ha persze a háromnegyedes döntést úgy írjuk elő, hogy a háromnegyedes arányt meg kell haladnia, akkor már mindegyik szavazónak szükséges az igen szavazata a döntéshez, tehát ekkor már mindegyikük hatalmi indexe $\frac{1}{3}$ lenne, tehát az elnök ekkor nem tudná érvényesíteni, hogy neki két szavazata van, míg a többieknek pedig csak egy-egy szavazat.

4. példa: Egy négytagú bizottságban az *a* tagnak 4 szavazata van, a *b* tagnak 3 szavazata van, a *c* tagnak 3 szavazata van, míg a *d* tagnak 2 szavazata van. Tegyük fel, hogy egy döntés elfogadásához egyszerű többség, vagyis 7 szavazat szükséges. Határozzuk meg az egyes tagok Shapley–Shubik-féle indexét!

Megoldás: A sorrendekben vastagon szedve jelöltük meg a kulcsszemélyeket.

abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb,
bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca,
cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba,
dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba.

Tehát

$$SSI(a)=\frac{10}{4!}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}=41\frac{2}{3}\%,$$

$$SSI(b)=\frac{6}{4!}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}=25\%,$$

$$SSI(c)=\frac{6}{4!}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}=25\%,$$

$$SSI(d)=\frac{2}{4!}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}=8\frac{1}{3}\%.$$

Így a szavazatok megoszlásai: $4:3:3:2=$ $=33\frac{1}{3}\%:25\%:25\%:16\frac{2}{3}\%$, míg a szavazási hatalom Shapley–Shubik-féle indexének arányai: $5:3:3:1=41\frac{2}{3}\%:25\%:25\%:8\frac{1}{3}\%$.

3. definíció: Egy javaslat elfogadásához szükséges szavazatszámot kvótának nevezzük és *q*-val jelöljük.

Így a 4. példában a kvóta $q=7$. Vizsgáljuk meg a 4. példa módosítását, mi történik az egyes tagok hatalmi indexével, ha eggyel növeljük a kvótát, vagyis a javaslat elfogadásához szükséges szavazatszámot.

5. példa: Egy négytagú bizottságban az *a* tagnak 4 szavazata van, a *b* tagnak 3 szavazata van, a *c* tagnak 3 szavazata van, míg a *d* tagnak 2 szavazata van. Tegyük fel, hogy egy döntés elfogadásához 8 szavazat szükséges. Határozzuk meg az egyes tagok Shapley–Shubik-féle indexét!

Megoldási végeredmény: Mindegyik tag hatalmi indexe ugyanakkora, vagyis $\frac{1}{4}=25\%$.

6. példa: Egy négytagú bizottságban az *a* tagnak 5 szavazata van, a *b* tagnak 3 szavazata van, a *c* tagnak 3 szavazata van, és a *d* tagnak 2 szavazata van. Határozzuk meg az egyes tagok hatalmi Shapley–Shubik-féle indexét, ha

a) egy javaslat elfogadásához 7 igen szavazat szükséges;

b) egy javaslat elfogadásához 8 igen szavazat szükséges;

c) egy javaslat elfogadásához 9 igen szavazat szükséges;

d) egy javaslat elfogadásához 10 igen szavazat szükséges;

e) egy javaslat elfogadásához 11 igen szavazat szükséges;

f) egy javaslat elfogadásához 12 igen szavazat szükséges;

g) egy javaslat elfogadásához 13 igen szavazat szükséges.

Megoldás:

a) q = 7-nél:

Soroljuk fel a lehetséges sorrendeket és jelöljük meg bennük a kulcsszemélyeket!

***a**bcd, a**b**dc, a**c**bd, a**c**db, a**d**bc, a**d**cb,*
*b**a**cd, b**a**dc, bc**a**d, bc**d**a, bd**a**c, bd**c**a,*
*c**a**bd, c**a**db, cb**a**d, cb**d**a, cd**a**b, cd**b**a,*
*d**a**bc, d**a**cb, db**a**c, db**c**a, dc**a**b, dc**b**a.*

Tehát

$$SSI(a) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 50\%,$$

$$SSI(b) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \approx 16{,}67\%,$$

$$SSI(c) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \approx 16{,}67\%,$$

$$SSI(d) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \approx 16{,}67\%.$$

Így a hatalmi indexek arányai: 12 : 4 : 4 : 4 = = 3 : 1 : 1 : 1 = 50% : 16,67% : 16,67% : 16,67%.
Míg a szavazati arányok:
5 : 3 : 3 : 2 ≈ 38,46% : 23,07% : 23,07% : 15,38%.

b) q = 8-nál:

Soroljuk fel a lehetséges sorrendeket és jelöljük meg bennük a kulcsszemélyeket!

***a**bcd, a**b**dc, a**c**bd, a**c**db, ad**b**c, ad**c**b,*
*b**a**cd, b**a**dc, bc**a**d, bc**d**a, bd**a**c, bd**c**a,*
*c**a**bd, c**a**db, cb**a**d, cb**d**a, cd**a**b, cd**b**a,*
*da**b**c, da**c**b, db**a**c, db**c**a, dc**a**b, dc**b**a.*

Tehát

$$SSI(a) = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \approx 41{,}67\%,$$

$$SSI(b) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 25\%,$$

$$SSI(c) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 25\%,$$

$$SSI(d) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \approx 8{,}33\%.$$

Így a hatalmi indexek arányai:
10 : 6 : 6 : 2 = 5 : 3 : 3 : 1 =
= 41,67% : 25% : 25% : 8,33%.
A szavazati arányok: 5 : 3 : 3 : 2 ≈
≈ 38,46% : 23,07% : 23,07% : 15,38%.

c) Végeredmények q = 9-nél:

$$SSI(a) = \frac{1}{2} = 50\%, \quad SSI(b) = \frac{1}{6} \approx 16{,}67\%,$$

$$SSI(c) = \frac{1}{6} \approx 16{,}67\%, \quad SSI(d) = \frac{1}{6} \approx 16{,}67\%.$$

d) Végeredmények q = 10-nél:

$$SSI(a) = \frac{1}{2} = 50\%, \quad SSI(b) = \frac{1}{6} \approx 16{,}67\%,$$

$$SSI(c) = \frac{1}{6} \approx 16{,}67\%, \quad SSI(d) = \frac{1}{6} \approx 16{,}67\%.$$

e) Végeredmények q = 11-nél:

$$SSI(a) = \frac{1}{3} \approx 33{,}33\%, \quad SSI(b) = \frac{1}{3} \approx 33{,}33\%,$$

$$SSI(c) = \frac{1}{3} \approx 33{,}33\%, \quad SSI(d) = 0 = 0\%.$$

f) Végeredmények q = 12-nél:

$$SSI(a) = \frac{1}{4} = 25\%, \quad SSI(b) = \frac{1}{4} = 25\%,$$

$$SSI(c) = \frac{1}{4} = 25\%, \quad SSI(d) = \frac{1}{4} = 25\%.$$

g) Végeredmény q = 13-nál:

Nyilvánvalóan mindegyik tagnak ugyanakkora hatalmi indexe van, az előző esettel megegyező módon.

3. Az 1973 előtti Európai Gazdasági Közösség tagjainak Shapley–Shubik-féle hatalmi indexe

7. példa: 1958-ban a Római Szerződéssel alakult meg az Európai Gazdasági Közösség. (European Economic Community)

A tagjai: Németország (NSZK), Franciaország, Olaszország, Belgium, Hollandia és Luxemburg. A tagok lakosságuk számarányát és országuk politikai erejét figyelembe véve a következő szavazatszámokat kapták a döntéshozó testületükben: Németország 4 szavazat, Franciaország 4 szavazat, Olaszország 4 szavazat, Belgium 2 szavazat, Hollandia 2 szavazat és Luxemburg 1 szavazat. Egy javaslat megszavazásához legalább 12 igen szavazatra volt szükség. A szavazatszámok arányai tehát: $4 : 4 : 4 : 2 : 2 : 1 \approx$ $\approx 23{,}5\% : 23{,}5\% : 23{,}5\% : 11{,}8\% : 11{,}8\% : 5{,}9\%$. Számítsuk ki az egyes tagok Shapley–Shubik-féle hatalmi indexét!

Megoldás: Itt 6 tagú bizottságról van szó, így a lehetséges sorrendek száma $6! = 720$. A sorrendek kézi felírása és vizsgálata kézzel nem annyira kívánatos. Így kombinatorikus vizsgálatra van szükség vagy egy számítógépes elemzésre.

A kombinatorikus vizsgálatot a Taylor-könyv nyomán [2] végezzük, amely Steven Brams elemzésére támaszkodik. (Alan D. Taylor az Union College (Schenectady) matematika oktatója, míg Steven J. Brams a New York University politikatudományi professzora.)

Először Németország hatalmi indexét számítjuk ki. Ez nyilván megegyezik Franciaország illetve Olaszország hatalmi indexével.

Ugyebár Németországnak 4 szavazata van és a döntéshez 12 szavazatra van szükség.

Ha Németországot 7 vagy annál kevesebb szavazat előzi meg, akkor Németország nincs kulcspozícióban. Hiszen ezen esetekben Németországgal együtt legfeljebb 11 szavazat áll rendelkezésre és a döntéshez legalább 12 szavazat szükséges. Így Németországot legalább 8 szavazatnak kell megelőznie ahhoz, hogy Németország kulcspozícióba kerülhessen.

1. eset: Pontosan 8 szavazat előzi meg Németország szavazatát. Ekkor Németország kulcspozícióban van a 4 szavazatával. Nézzük meg, milyen módokon előzheti meg 8 szavazat Németország szavazatát, röviden Németországot.

1.a) eset: Németországot megelőzi Franciaország a 4 szavazatával, megelőzi Belgium a 2 szavazatával és megelőzi Hollandia a 2 szavazatával. A három országnak, Franciaországnak, Belgiumnak és Hollandiának $3! = 6$-féle sorrendje lehet, tehát 6-féleképpen előzhetik meg Németországot. Németország szavazata után következik két ország, Olaszország és Luxemburg szavazata. E két országnak $2! = 2$-féle sorrendje lehet. Így e két ország szavazata kétféleképpen követheti Németország szavazatát. Tehát összesen $3! \cdot 2! = 12$-féleképpen fordulhat elő az, hogy Németország szavazatait pontosan 8 szavazat előzi meg.

1.b) eset: Németországot megelőzi Olaszország a 4 szavazatával, megelőzi Belgium a 2 szavazatával és megelőzi Hollandia a 2 szavazatával. Ez lényegében megegyezik az *1.a)* esettel, így az *1.b)* eset $3! \cdot 2! = 12$-féleképpen fordulhat elő.

1.c) eset: Németországot megelőzi Franciaország a 4 szavazatával és megelőzi Olaszország a 4 szavazatával. Ebben az esetben két ország előzi meg Németországot s így e két országnak $2! = 2$-féle sorrendje lehetséges. Németországot három ország követi a szavazásban, Belgium, Hollandia és Luxemburg. Így e 3 országnak $3! = 6$-féle sorrendje lehetséges.

Vagyis ezen eset $2! \cdot 3! = 12$-féleképpen fordulhat elő.

Összesen az 1. esetben $12 + 12 + 12 = 36$-féleképpen fordulhat elő, hogy Németország kulcspozícióban van.

2. eset: Pontosan 9 szavazat előzi meg Németország szavazatát. Ekkor Németország kulcspozícióban van a 4 szavazatával. Vizsgáljuk meg, hogy hányféleképpen fordulhat elő ez az eset!

2.a) eset: Németországot megelőzi Franciaország a 4 szavazatával, megelőzi Belgium a 2 szavazatával, megelőzi Hollandia a 2 szavazatával és megelőzi Luxemburg az 1 szavazatával.

Így Németországot 4 ország előzi meg, és 4 országnak $4! = 24$-féle sorrendje lehetséges.

Németországot csak egy ország követi, Olaszország. Egy országnak 1! = 1-féle sorrendje lehet. Így ez az eset 4! · 1! = 24-féleképpen fordulhat elő.

2.b) eset: Németországot megelőzi Olaszország a 4 szavazatával, megelőzi Belgium a 2 szavazatával, megelőzi Hollandia a 2 szavazatával és megelőzi Luxemburg az 1 szavazatával.
Ez lényegében megfelel az előző esetnek, így itt is 4! · 1! = 24-féleképpen fordulhat elő ez az eset.

2.c) eset: Németországot megelőzi Franciaország a 4 szavazatával, Olaszország a 4 szavazatával és megelőzi Luxemburg az 1 szavazatával. Ekkor Németországot 3 ország előzte meg. Három országnak 3! = 6-féle sorrendje lehet. Németországot ekkor két ország követi, Belgium és Hollandia. Két országnak 2! = 2-féle sorrendje lehet. Így ez az eset összesen 3! · 2! = 12-féleképpen fordulhat elő.

3. eset: Pontosan 10 szavazat előzi meg Németországot. Ekkor Németország kulcspozícióban van a 4 szavazatával. Vizsgáljuk meg, hogy ez hányféleképpen fordulhat elő!

3.a) eset: Németországot megelőzi Franciaország a 4 szavazatával, megelőzi Olaszország a 4 szavazatával és megelőzi Belgium a 2 szavazatával. Három országnak 3! = 6-féle sorrendje van. Németországot követi két ország, Hollandia és Luxemburg. Két országnak 2! = 2-féle sorrendje lehet. Így ez az eset öszesen 3! · 2! = 12-féleképpen valósulhat meg.

3.b) eset: Németországot megelőzi Franciaország a 4 szavazatával, Olaszország a 4 szavazatával és Hollandia a 2 szavazatával. Ez az eset lényegében megegyezik az előző esettel. Így ez az eset is 3! · 2! = 12-féleképpen valósulhat meg.

4. eset: Pontosan 11 szavazat előzi meg Németországot. Ekkor Németország kulcspozícióban van a 4 szavazatával. Számítsuk ki, hogy ez hányféleképpen fordulhat elő.

4.a) eset: Németországot megelőzi Franciaország a 4 szavazatával, megelőzi Olaszország a 4 szavazatával, megelőzi Belgium a 2 szavazatával és megelőzi Luxemburg az 1 szavazatával.
Ekkor Németországot 4 ország előzi meg. Négy országnak 4! = 24-féle sorrendje lehet. Németországot egy ország követi, mégpedig Hollandia. Egy országnak 1! = 1-féle sorrendje lehet. Így ez az eset 4! · 1! = 24-féleképpen fordulhat elő.

4.b) eset: Németországot megelőzi Franciaország a 4 szavazatával, Olaszország a 4 szavazatával, Hollandia a 2 szavazatával és Luxemburg az 1 szavazatával.
Ez az eset lényegében megegyezik az előző esettel, így ez az eset is 4! · 1! = 24-féleképpen fordulhat elő.
Ha 12 szavazat vagy ennél több szavazat előzi meg Németországot, akkor Németország szavazatára már nincs szükség a döntéshez. Így ezekben az esetekben Németország nincs kulcspozícióban.
Tehát Németország Shapley–Shubik-féle indexe:

$$SSI(\text{Németország}) = \frac{3!\cdot 2!+3!\cdot 2!+2!\cdot 3!+4!\cdot 1!+4!\cdot 1!+3!\cdot 2!+3!\cdot 2!+3!\cdot 2!+4!\cdot 1!+4!\cdot 1!}{6!} =$$

$$= \frac{12+12+12+24+24+12+12+12+24+24}{720} = \frac{168}{720} = \frac{14}{60} \approx 23{,}33\%$$

Mivel Franciaországnak és Olaszországnak egyaránt négy-négy szavazata van, vagyis ugyanannyi, mint Németországnak, ezért e két ország hatalmi indexe megegyezik Németországéval a szimmetria miatt. Vagyis:

$$SSI(\text{Franciaország}) = \frac{14}{60} \approx 23{,}33\%$$

és

$$SSI(\text{Olaszország}) = \frac{14}{60} \approx 23{,}33\%.$$

Gondolom, hogy hasonló kombinatorikus elemzéssel kiszámítható a többiek *SSI* hatalma is. De erre nincs szükség.
Ugyanis vegyük észre, hogy Luxemburg Shapley–Shubik-féle indexe nulla. Vegyük figyelembe, hogy a döntéshez 12 szavazatra van szükség és

a Luxemburgnak 1 szavazata van, míg a többi állam szavazatai páros számok. Így a döntés meghozatalához Luxemburg soha nem lehet kulcspozícióban. Így Luxemburgnak 0 kulcspozíciója van. Tehát

$$SSI(Luxemburg) = \frac{0}{720} = 0 = 0\%.$$

Vegyük figyelembe, hogy Belgium és Hollandia egyaránt két-két szavazattal rendelkezik, ezért a szimmetria miatt ugyanannyiszor vannak kulcspozícióban, s így hatalmi indexük is egyenlő.

$$SSI(Belgium) = SSI(Hollandia)$$

Másrészt használjuk fel a 2. állítást, miszerint a szavazók *SSI* hatalmának összege 1.
Így

$$SSI(Németország) + SSI(Franciaország) + SSI(Olaszország) + SSI(Belgium) + SSI(Hollandia) + SSI(Luxemburg) = 1$$

Ebből

$$\frac{14}{60} + \frac{14}{60} + \frac{14}{60} + SSI(Belgium) + SSI(Belgium) + 0 = 1$$

Tehát $SSI(Belgium) = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} = 15\%$ és

$SSI(Hollandia) = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} = 15\%.$

Összefoglalva:

Ország	Szavazatok	Szavazatok %-a	SSI	SSI hatalom %-ban
Németo.	4	23,53%	14/60	23,33%
Franciao.	4	23,53%	14/60	23,33%
Olaszo.	4	23,53%	14/60	23,33%
Belgium	2	11,76%	9/60	15%
Hollandia	2	11,76%	9/60	15%
Luxemburg	1	5,88%	0	0%

Jól érzékelhető, hogy a három legnagyobb ország szavazatarányа körülbelül megegyezik az *SSI* hatalmuk arányával. Belgium és Hollandia *SSI* hatalma kissé nagyobb arányú, mint szavazatszámuk aránya, míg Luxemburg *SSI* hatalma nulla, ami nyilván kisebb a kb. 6%-os szavazati arányánál.

4. Lehetőségek vizsgálata az 1973 előtti Európai Gazdasági Közösség tagjainak szavazatszámának a megállapításához

Az országok szavazatszámait megfigyelve azt gondolhatjuk, hogy a 3 legnagyobb országnak egyenlő számú szavazatot akartak adni, Belgiumnak és Hollandiának szintén egyenlő számú szavazatot gondoltak, ezek azonban maradjanak el a nagyok szavazatszámai mellett. Míg Luxemburgnak legyen szavazata, de csak annyi, hogy lényegében ne tudjon befolyásolni semmilyen döntést.

Ha ezeket az elveket figyelembe vesszük, akkor is többféle megoldást lehet kidolgozni, amelyeknek ugyanaz, vagy lényegében ugyanaz az eredménye, mint a megvalósult rendszernek.

Sikerült konstruálnom egy számítógépes programot, amely rugalmasan tud alkalmazkodni a különféle követelményekhez, ha az országok létszáma nem nagy. A 6 darab országot még tudja kezelni a program.

1. kérdés: Mi történt volna akkor, ha marad az egyes országok szavazatszáma, de a döntéshez szükséges szavazatszámot, azaz a kvótát változtatnánk?
Ugyebár $4 + 4 + 4 + 2 + 2 + 1 = 17$ szavazat az összes szavazat száma.

1.a) kérdés: Mi történt volna akkor, ha csak az egyszerű többséget követelték volna meg a döntésnél, vagyis 9 szavazatot?
A számítógépes elemzés szerint ekkor

$$SSI(Németország) = SSI(Franciaország) = SSI(Olaszország) = \frac{7}{30} \approx 23{,}33\%,$$

$$SSI(Belgium) = SSI(Hollandia) = \frac{1}{10} = 10\,\%$$

$$\text{és } SSI(Luxemburg) = \frac{1}{10} = 10\%.$$

Tehát a nagyok *SSI* hatalma egyszerű többség esetén sem változott volna, a közepesek hatalma csökkent volna. Ez a csökkenés 15%-ról

10%-ra 33,33%-os csökkenés lenne, amely tetemesnek mondható. Luxemburg *SSI* hatalma nulláról 10%-ra nőtt volna, amely néhány döntésnél érdemi beleszólást engedett volna Luxemburg számára.

1.b) kérdés: Milyen a hatalom eloszlása $q = 10$-nél?

$$SSI(Németország) = SSI\ (Franciaország) = SSI(Olaszország) = \frac{16}{60} = \frac{4}{15} \approx 26{,}67\%.$$

Kissé nőtt volna a nagyok hatalma az eredetihez képest.

$$SSI(Belgium) = SSI(Hollandia) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} = 10\%.$$

A közepesek hatalma csökkent volna az eredetihez képest harmadrésszel.

$$SSI(Luxemburg) = 0 = 0\%.$$

Luxemburg hatalma változatlan maradt volna.

1.c) kérdés: Milyen a hatalom eloszlása $q = 11$-nél?

A három nagy hatalma változatlan maradt volna, a két közepes hatalma egyaránt 10% lett volna, míg Luxemburg hatalma 10%-ra nőtt volna. Tehát ez az eset megegyezik a $q = 9$ esetével.

1.d) kérdés: Milyen a hatalom eloszlása $q = 13$-nál? (Ugyebár a $q = 12$ eset a részletesen vizsgált megvalósult eset.)

$$SSI(Németország) = SSI\ (Franciaország) = SSI(Olaszország) = \frac{13}{60} \approx 21{,}67\%.$$

Tehát a nagyok hatalma kissé csökkent volna.

$$SSI(Belgium) = SSI(Hollandia) = SSI(Luxemburg) = \frac{7}{60} \approx 11{,}67\%.$$

Tehát a közepesek hatalma az eredetihez képest csökkent volna, míg Luxemburgé eléggé nőtt volna.

1.e) kérdés: Milyen a hatalom eloszlása $q = 14$-nél?

$$SSI(Németország) = SSI\ (Franciaország) = SSI(Olaszország) = \frac{3}{10} = 30\%.$$

A nagyok hatalma észrevehetően nőtt volna.

$$SSI(Belgium) = SSI(Hollandia) = \frac{1}{20} = 5\%.$$

A közepesek hatalma az eredeti érték harmadára csökkent volna.

$$SSI(Luxemburg) = 0 = 0\%.$$

Vagyis Luxemburg hatalma nem változott volna.

1.f) kérdés: Milyen a hatalom eloszlása $q = 15$-nél?

$$SSI(Németország) = SSI\ (Franciaország) = SSI(Olaszország) = \frac{4}{15} \approx 26{,}66\%.$$

A nagyok hatalma kissé nőtt volna.

$$SSI(Belgium) = SSI(Hollandia) = SSI(Luxemburg) = \frac{1}{15} \approx 6{,}67\%.$$

A közepesek hatalma erősen csökkent volna, kevesebb, mint a felére. Luxemburg hatalma egyenlő lenne a közepesek hatalmával.

1.g) kérdés: Milyen a hatalom eloszlása $q = 16$-nál?

Luxemburg hatalma nulla lenne, míg a többiek hatalma egyaránt 20% lenne.

1.h) kérdés: Milyen lenne a hatalom eloszlása $q = 17$-nél?

Ekkor mindegyik ország hatalma azonos lenne, vagyis $\frac{1}{6} \approx 16{,}67\%$.

2. kérdés: Milyen szavazateloszlásnál és milyen kvótánál kapnánk megegyező hatalmi értékeket a megvalósult hatalmi értékekkel?

Ez eléggé általános kérdés. Így meg sem kíséreljük rá a teljes válasz megkeresését.

Viszont a számítógéppel sikerült ráakadni egykét olyan szavazateloszlásra és kvótára, amely-

nél ugyanazok az *SSI* hatalmi értékek, mint a megvalósult esetben.

Például azt állítjuk, hogy ha Németország 5 szavazattal rendelkezik, Franciaország 5 szavazattal rendelkezik, Olaszország 5 szavazattal rendelkezik, Belgium 3 szavazattal rendelkezik, Hollandia 3 szavazattal rendelkezik, Luxemburg 1 szavazattal rendelkezik és a döntések elfogadásához $q = 15$ szavazat a kvóta, akkor az egyes országok *SSI* indexei megegyeznek az eredeti megvalósult esetben kiszámított értékekkel.

Ennek igazolását Olvasóinkra bízzuk, akik vagy kombinatorikus megfontolásokkal vagy számítógépes elemzéssel igazolhatják az állítást.

Érdekes lenne további megvalósult szavazási rendszereket elemezni.

Feladatok

1. Egy háromtagú bizottságban az *a* személynek 50 szavazata van, a *b* személynek 49 szavazata van és a *c* személynek 1 szavazata van. Tegyük fel, hogy 51 szavazatra van szükség egy javaslat elfogadásához. Számítsuk ki az egyes személyek hatalmi Shapley–Shubik-féle indexét! (Steven Brams példája, [2])

(Végeredmények: $SSI(a) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $SSI(b) = \frac{1}{6}$, $SSI(c) = \frac{1}{6}$.)

2. Egy négytagú bizottságban az *a* tagnak 1 szavazata van, a *b* tagnak szintén 1 szavazata van, a *c* tagnak 2 szavazata és a *d* tagnak 3 szavazata van. Tegyük fel, hogy 5 szavazatra van szükség egy javaslat elfogadására. Számítsuk ki az egyes tagok Shapley–Shubik-féle hatalmi indexét! ([1] 91-92.oldal, és 124.oldal)

(Végeredmények:

$SSI(a) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$, $SSI(b) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$,

$SSI(c) = \frac{6}{24} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, $SSI(d) = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$.)

3. Próbáljunk meg néhány választ igazolni, amelyeket az 1. kérdés különböző pontjaira adtunk!

4. Tegyük fel, hogy Németország 5 szavazattal, Franciaország 5 szavazattal, Olaszország 5 szavazattal, Belgium 2 szavazattal, Hollandia 2 szavazattal és Luxemburg 1 szavazattal rendelkezett volna egy képzeletbeli Európai Gazdasági Közösségben. Így összesen 20 szavazat a szavazatok összege. Legyen a döntéshez szükséges szavazatok száma 14. Mutassuk meg, hogy e képzeletbeli Európai Gazdasági Közösségben az egyes országok Shapley–Shubik-féle hatalmi indexei megegyeznek az 1973-ig megvalósuló EGK-ban levő *SSI* hatalmi indexekkel!

Vagyis e képzeletbeli közösségnél is

$$SSI(Németország) = SSI(Franciaország) = SSI(Olaszország) = \frac{7}{30} \approx 23{,}33\%.$$

$$SSI(Belgium) = SSI(Hollandia) = \frac{3}{20} = 15\%.$$

$$SSI(Luxemburg) = 0 = 0\%.$$

Irodalom

[1] Kemeny, J. G. – J. L. Snell – G. L. Thompson: *A modern matematika alapjai (Véges struktúrák),* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971. 90-93. és 123-127.

[2] Taylor, Alan D.: *Mathematics and Politics. Strategy, Voting, Power and Proof,* Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, etc. 1995. 63-75.

[3] Theisz György: Igen-nem szavazórendszerek, *Polygon*, XII. kötet 1-2. szám, 2003. június, 63-69.

[4] Shapley, Lloyd and Martin Shubik: A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System, *American Political Science Review*, 48 (1954), 787-792. (Ezt sajnos nem láttam.)

Köszönöm szépen Varga Ferencné könyvtárvezetőnek (Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete) a Taylor-könyv kölcsönzését.

Dr. Darvasi Gyula

A Pitagorasz-tétel egy nem közismert általánosítása

A Thalész- és Pitagorasz-tétel összekapcsolásából következik, hogy az $\overline{AB}$ átfogójú ABC_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$) derékszögű háromszögek C_i csúcsai az $\overline{AB}$ átmérőjű körre illeszkednek és ugyanekkor teljesül az $AC_i^2 + BC_i^2 = AB^2$ összefüggés is. Mindez geometriailag azt jelenti, hogy az ABC_i derékszögű háromszögek $\overline{AC_i}$ és $\overline{BC_i}$ befogói fölé rajzolt négyzetek területeinek összege a C_i csúcs minden lehetséges helyzetére egyenlő az $\overline{AB}$ átfogó fölé rajzolt négyzet (1. ábra) területével, ami az A és B pontok rögzítése után egy állandó érték.

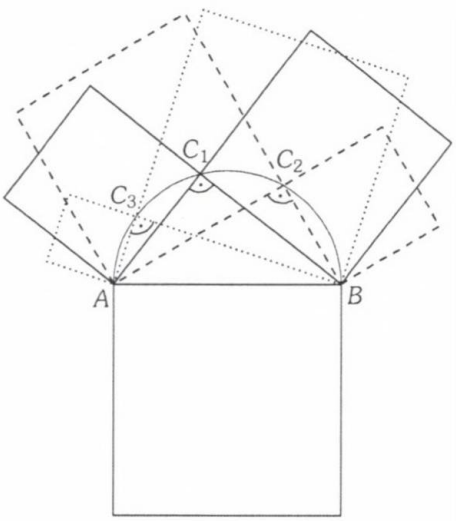
A fenti tényállásból kiindulva általánosítást keresünk a Pitagorasz-tételre. E célból válasszuk az ABC_i háromszöget úgy, hogy a C_i csúcsnál lévő szöge ne legyen derékszög, és vizsgáljuk meg, hogy rögzített $\overline{AB}$ oldal és C_0 csúcs esetén a C_i csúcsok milyen alakzatot futnak be, ha azt kívánjuk, hogy az $\overline{AC_i}$ és $\overline{BC_i}$ oldalak fölé rajzolt négyzetek területeinek összege mindig $AC_0^2 + BC_0^2$ legyen, vagyis állandó maradjon. Ehhez a vizsgálathoz az ABC_0 háromszöget Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben helyezzük el úgy, hogy $c = AB$ jelöléssel az $A\left(-\frac{c}{2}; 0\right)$, $B\left(\frac{c}{2}; 0\right)$ és $C_0(x_0; y_0)$ megadási módot választjuk (2. ábra), a mozgó C_i pont koordinátáira pedig bevezetjük az $(x; y)$ jelölést. Ekkor az $AC_i^2 + BC_i^2 = AC_0^2 + BC_0^2$ feltétel

$$\left(x+\frac{c}{2}\right)^2 + y^2 + \left(x-\frac{c}{2}\right)^2 + y^2 =$$

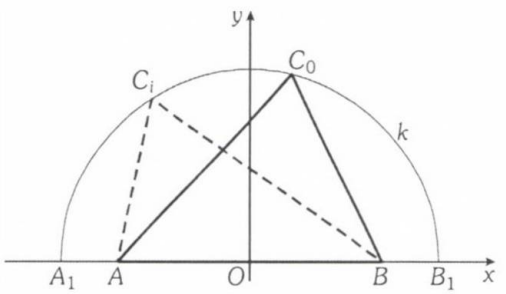
$$= \left(x_0+\frac{c}{2}\right)^2 + y_0^2 + \left(x_0-\frac{c}{2}\right)^2 + y_0^2$$

alakba írható, ahonnan

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$$



1. ábra



2. ábra

kapható, és minthogy $C_0 \notin \overleftrightarrow{AB}$ miatt $x_0^2 + y_0^2 > 0$, ezért a C_i pontok egy olyan körvonalon vannak, amelynek középpontja az $\overline{AB}$ oldal O felezőpontja és sugara az ABC_0 háromszög C_0 csúcsához tartozó $\overline{OC_0}$ súlyvonala. Az $\overline{OC_0}$ szakasz s_c hossza a koszinusztétel ABC_0 és AOC_0 háromszögekre történő alkalmazása révén kifejezhető az $a = BC_0$, $b = C_0A$, $c = AB$ adatokkal:

$$s_c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}},$$

ahonnan $a^2 + b^2 = c^2 + 2ab\cos\gamma$ miatt

$$s_c = \sqrt{\frac{c^2}{4} + ab\cos\gamma}$$

adódik, s ennélfogva $0° < \gamma < 90°$ esetén $s_c > \frac{c}{2}$, míg $90° < \gamma < 180°$ esetén $s_c < \frac{c}{2}$. Ha ezek után bevezetjük a $k(O,s_c) \cap \overleftrightarrow{AB} = \{A_1, B_1\}$ jelölést, akkor egyrészt k nyilván az $\overline{A_1B_1}$ szakasz Thalész-köre, másrészt $0° < \gamma < 90°$ esetén $\overline{AB} \subset \overline{A_1B_1}$, míg $90° < \gamma < 180°$ esetén $\overline{A_1B_1} \subset \overline{AB}$ teljesül, továbbá az $\overline{AA_1}$ és $\overline{BB_1}$ szakaszok hossza egyenlő az O pontra vonatkozó szimmetria miatt. Jelöljük d-vel ezt a közös hosszat, amire tehát esetünkben

$$d = \left| s_c - \frac{c}{2} \right| = \begin{cases} s_c - \frac{c}{2}, \text{ ha } 0° < \gamma < 90° \\ \frac{c}{2} - s_c, \text{ ha } 90° < \gamma < 180° \end{cases}$$

érvényes.

Tekintsük elsőként a $0° < \gamma < 90°$ esetet, amikor is

$$d = s_c - \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}} - \frac{c}{2},$$

ahonnan

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}} = d + \frac{c}{2},$$

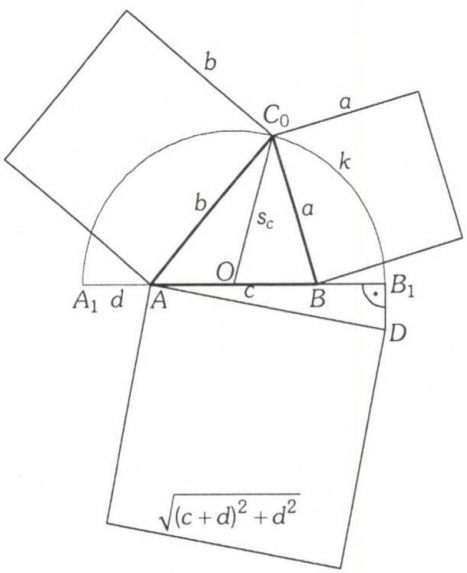
s ebből pedig

$$a^2 + b^2 = (c+d)^2 + d^2 \qquad (1)$$

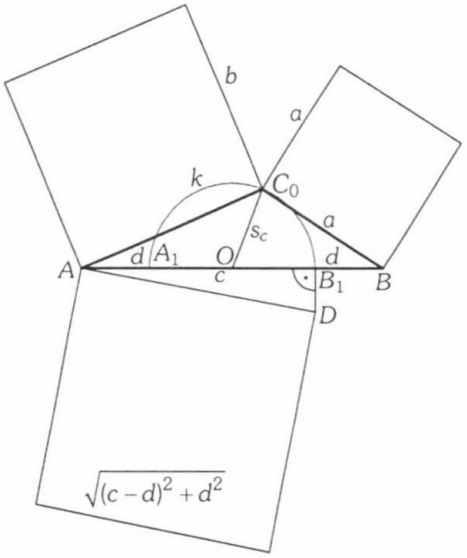
kapható. Ezen összefüggés szerint ABC_0 háromszög $\overline{AC_0}$ és $\overline{BC_0}$ oldalai fölé rajzolt négyzetek területeinek összege egy olyan négyzet területével egyenlő, amelynek oldala $AD = \sqrt{(c+d)^2 + d^2}$ hosszúságú (3. ábra). S minthogy $C_i \in k(O, s_c)$ esetén az ABC_i háromszögekre $AC_i^2 + BC_i^2 = AC_0^2 + BC_0^2 = a^2 + b^2$ teljesül, ezért az $\overline{AC_i}$ és $\overline{BC_i}$ oldalak fölé rajzolt négyzetek területeinek összege mindig az $\overline{AD}$ oldalú négyzet területével egyenlő, ami az A, B, C_0 pontok rögzítése után állandó. S ez a tény még az olyan $C_i \in k$ pontokra is változatlanul igaz, amelyekre az α és β szögek valamelyike éppen derék- vagy tompaszög.

Másodjára maradt még a $90° < \gamma < 180°$ lehetőség, amikor $d = \frac{c}{2} - s_c$, s így ennek az esetnek az előzőével analóg módon történő leírása az

$$a^2 + b^2 = (c-d)^2 + d^2 \qquad (2)$$



3. ábra



4. ábra

összefüggésre vezet, ami az (1)-gyel hasonló geometriai tartalommal rendelkezik (4. ábra).

Összefoglalva megállapítható, hogy $\gamma \neq 90^\circ$ esetén (1) és (2) alapján fennáll az

$$a^2 + b^2 = (c \pm d)^2 + d^2 \qquad (3)$$

összefüggés, ami $\gamma = 90^\circ$ esetén $d = 0$ miatt a jól ismert Pitagorasz-tételre vezet, s ennélfogva (3) a Pitagorasz-tétel egy lehetséges általánosítása.

Irodalom

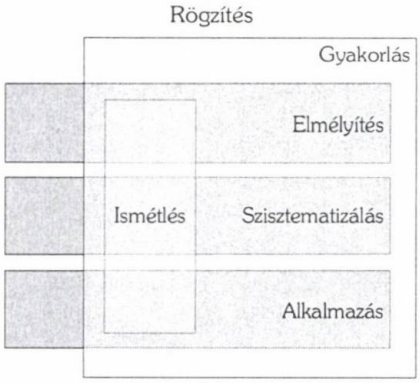
[1] Schmitz, M.: Der Satz des Pythagoras als Ausgangspunkt für ein weiteres Problem. Praxis der Mathematik in der Schule 46 (2004) 37-39

[2] Schmitz, M.: Eine mögliche Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras. Praxis der Mathematik in der Schule 46 (2004) 173-177

Helyreigazítás

A matematika tanítása 2004. évi 3. számában *Dr. Ambrus Gabriella A gyakorlás újfajta értelmezése a matematikadidaktikában és a matematikatanárok képzésében* c. cikkében az 1. ábrát hibásan közöltük.

A helyes ábra a következő:



* * *

A matematika tanítása 2004. évi 4. számának 10. oldalán lévő irodalomjegyzékben néhány név hibásan szerepel.

Mitrinoviae helyesen: Mitrinović

Vasiae helyesen: Vasić

Peèariae helyesen: Pečarić

Ezúton kérünk elnézést a cikkek íróitól és az olvasóktól. (szerk.)

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2005. január 31.

Feladatok (260-264.)

260. Az egységnyi sugarú körbe írt $ABCD$ húrnégyszög AC és BD átlói merőlegesek egymásra. Számítsuk ki a négyszög oldalainak négyzetösszegét!

261. A p paraméter mely valós értékeire van az

$$(x^2 - 2px - 4(p^2 + 1))(x^2 - 4x - 2p(p^2 + 1)) = 0$$

egyenletnek pontosan három, páronként különböző valós gyöke?

262. Mutassuk meg, hogy minden olyan pozitív egész számnak van csupa 1-es számjegyből álló többszöröse, amely az 1, 3, 7 vagy 9 számjegyek valamelyikére végződik.

263. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (n pozitív egész) valós számokra $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0$. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\sqrt{1 + a_1 x} + \sqrt{1 + a_2 x} + \ldots + \sqrt{1 + a_n x} = n$$

egyenletnek van legalább egy 0-tól különböző valós gyöke.

264. Az $A_1A_2\ldots A_n$ ($n \geq 3$) konvex sokszög A_1 csúcsába 1-et, a többi csúcsba 0-t írunk. A csúcsokba írt számok a következő szabály szerint változtathatók: Ha az A_i csúcsban 1 áll, és az A_{i-1}, A_i, A_{i+1} csúcsokban álló számokat rendre a, b, c jelöli, akkor ezek a számok egyidejűleg rendre az $1 - a$, $1 - b$, $1 - c$ számokra cserélhetők. Elérhető-e véges sok ilyen lépéssel, hogy mindegyik csúcsban 0 álljon, ha

a) $n = 2004$;

b) $n = 2005$?

Feladatmegoldások (245-249. feladatok)

245. Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + px + q$ függvényről tudjuk, hogy $|f(0)| > 1$ és $f(1) \cdot f(-1) > 0$. Van-e f-nek zérushelye a $[-1; 1]$ intervallumban?

Megoldás: Indirekt módon belátjuk, hogy f-nek nincs zérushelye a $[-1; 1]$ intervallumban.
Tegyük fel, hogy $x_1 \in [-1; 1]$ zérushelye f-nek. Mivel f főegyütthatója 1, és $f(1) \cdot f(-1) > 0$, ezért $|x_1| < 1$, és ha van x_1-től különböző x_2 zérushelye is f-nek, akkor erre is teljesül, hogy $|x_2| < 1$. Mindenesetre $|x_1 \cdot x_2| = |q| < 1$.
Másrészt, mivel $|f(0)| > 1$, ezért $|f(0)| = |q| > 1$.
A kapott ellentmondás igazolja állításunkat.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 8.

246. Oldjuk meg a nemnegatív egészek körében a következő egyenletet!

$$5^x \cdot 7^y + 4 = 3^z$$

Megoldás: Könnyen látható, hogy az $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$ számhármas megoldás. A következőkben kiderül, hogy más megoldás nincs.
Írjuk az egyenletet

$$(6 - 1)^x \cdot (6 + 1)^y + 4 = 3^z$$

alakba, és alkalmazzuk a bal oldali tényezőkre a binomiális tételt. Ha x páros lenne, akkor

$$6A + 5 = 3^z$$

adódna, ami nem lehet, ugyanis a bal oldal 3-mal osztva 2 maradékot adna, a jobb oldal pedig 1-et ($z = 0$), vagy 0-át. x tehát páratlan,

legyen $x = 2m + 1$. Ekkor az egyenlet bal oldala 9-re végződő szám. 3^z pontosan akkor végződik 9-re, ha $z = 4n + 2$. Ezekkel az új jelölésekkel az egyenlet:

$$5 \cdot 25^m \cdot 7^y + 4 = 9 \cdot 81^n,$$

vagy átalakítás után

$$5 \cdot 25^m \cdot 7^y = (3 \cdot 9^n + 2) \cdot (3 \cdot 9^n - 2).$$

A jobb oldal két olyan páratlan szám szorzata, amelyek különbsége 4, amiből adódóan relatív prímek. Ha a kisebbik tényező 1, akkor a már említett megoldás adódik. Ha egyik tényező sem 1, akkor a következő két eset lehetséges:

$$\text{(1)} \quad \left.\begin{aligned} 5 \cdot 25^m &= 3 \cdot 9^n + 2 \\ 7^y &= 3 \cdot 9^n - 2 \end{aligned}\right\}$$

vagy

$$\text{(2)} \quad \left.\begin{aligned} 5 \cdot 25^m &= 3 \cdot 9^n - 2 \\ 7^y &= 3 \cdot 9^n + 2 \end{aligned}\right\},$$

ahol feltehető, hogy n pozitív, de ekkor m és y is pozitív.

(1)-ből adódik, hogy $5 \cdot 25^m - 4 = 7^y$. A bal oldal minden m esetén olyan pozitív egész szám, amely 21-re végződik. A jobb oldalon álló 7 hatvány pontosan akkor végződik 1-re, ha $y = 4k$. Ekkor viszont $7^y = 7^{4k} = 2401^k$, amiből kapjuk, hogy az (1) eset nem állhat.

(2)-ből: $5 \cdot 25^m + 4 = 7^y$. A bal oldalon egy 9-re végződő szám áll, a jobb oldali hatvány csak $y = 4l + 2$ esetén végződhet 9-re. Ekkor

$$5^{2m+1} = 7^{4l+2} - 4 = (7^{2l+1} - 2) \cdot (7^{2l+1} + 2).$$

Itt a bal oldal 5 hatvány, a jobb oldal viszont két 1-nél nagyobb relatív prím szorzata, ami nem lehet 5 hatványa. Tehát a (2) eset sem teljesülhet.

Ezzel beláttuk, hogy az egyenlet egyetlen megoldása a már említett $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$ számhármas.

Kamarás Lajos, Pécs
Kiss Zoltán, Pécs

A megoldók száma: 7.

247. Az ABC háromszög beírt köréhez húzzunk a háromszög oldalaival párhuzamos érintőket. Ezen érintők és a háromszög oldalainak metszéspontjai egy hatszög csúcsai. Mutassuk meg, hogy ennek a hatszögnek a kerülete nem lehet nagyobb, mint a háromszög kerületének 2/3-a!

Megoldás: Jelölje K a hatszög, $2s$ a háromszög kerületét. Be kell látni, hogy $K \le \frac{2}{3} \cdot 2s$. Ha ennek az egyenlőtlenségnek mindkét oldalát megszorozzuk a háromszög beírt köre sugarának felével, akkor a bizonyítandóval ekvivalens $T \le \frac{2}{3} T_{ABC}$ egyenlőtlenséget kapjuk (T a hatszög, T_{ABC} az ABC háromszög területe). Az *1. ábra* jelöléseit használva $T = T_{ABC} - T_A - T_B - T_C$, így állításunk átfogalmazva:

$$\frac{1}{3} T_{ABC} \le T_A + T_B + T_C. \qquad (1)$$

Mivel $AC_1B_2 \triangle \sim ABC \triangle$, ezért területük aránya:

$$\frac{T_A}{T_{ABC}} = \left(\frac{m_a - 2r}{m_a}\right)^2 = \left(1 - \frac{2r}{m_a}\right)^2, \qquad (2)$$

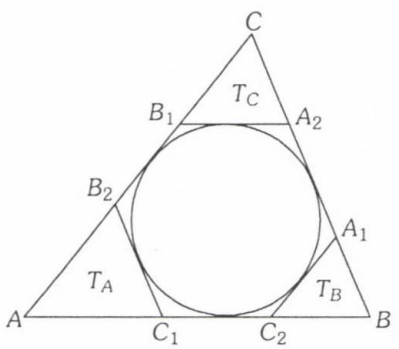
ahol m_a a $BC = a$ oldalhoz tartozó magasság, r pedig a beírt kör sugara.

Mivel $2T_{ABC} = a \cdot m_a = 2s \cdot r$, ezért $\frac{2r}{m_a} = \frac{a}{s}$.

Ezt (2)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$T_A = \left(1 - \frac{a}{s}\right)^2 \cdot T_{ABC} = \left(\frac{s-a}{s}\right)^2 \cdot T_{ABC}.$$

Hasonlóan kapjuk a $T_B = \left(\frac{s-b}{s}\right)^2 \cdot T_{ABC}$ és $T_C = \left(\frac{s-c}{s}\right)^2 \cdot T_{ABC}$ összefüggéseket.



1. ábra

Ezeket (1)-be írva a bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{3}s^2 \le (s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2. \qquad (3)$$

A számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt{\frac{(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2}{3}} \ge$$

$$\ge \frac{s-a+s-b+s-c}{3} = \frac{s}{3},$$

ahonnan (3) azonnal adódik. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha az ABC háromszög szabályos.

Ezzel beláttuk a feladat állítását.

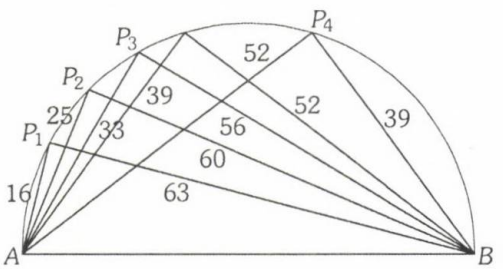
Rakonczai György, Budapest

A megoldók száma: 10.

248. Egy 32,5 cm sugarú kör egyik átmérőjének végpontjai A és B. A körvonal egymástól, valamint A-tól és B-től is különböző C és D pontjai olyanok, hogy az AC, AD, BC és BD szakaszok hossza cm-ben mérve egész szám. Mekkora lehet a C és D pontok legkisebb távolsága?

Kunovszki István, Mohács

Megoldás: Az AC, BC, illetve AD, BD egy 65 egységnyi átfogójú derékszögű háromszög befogói, ezért, ha a C és D betűk helyett a $P_1, P_2, \ldots$ jelölést használjuk, akkor $AP_i^2 + BP_i^2 = 65^2$, ahol AP_i és BP_i pozitív egészek. Ennek a pitagoraszi egyenletnek a megoldásai $65 = k(m^2+n^2)$, $AP_i = k(m^2-n^2)$, $BPi = k \cdot 2mn$ alakúak, ahol k, m, n pozitív egészek, $m > n$, m és n relatív prímek, m és n közül pontosan az egyik páros. Felhasználva, hogy $65 = 1 \cdot 5 \cdot 13$, az AP_i és BP_i szakaszokra négy, a feladat kérdése szempontjából lényegesen különböző megoldás adódik: (16; 63), (25; 60), (33; 56), (39; 52).



2. ábra

Elegendő a *2. ábrán* látható félkört vizsgálni, hiszen az AP_1B háromszög AB-hez tartozó magassága is hosszabb a P_iP_j minimumánál.

Szimmetria miatt elegendő a P_1, P_2, ..., P_5 pontokkal foglalkozni. Az ABP_iP_j húrnégyszögekre felírva Ptolemaiosz tételét (elegendő csak szomszédos pontokat összekötő P_iP_j szakaszokat tekinteni), kiderül, hogy a legkisebb távolság a P_3P_4:

$$P_3P_4 \cdot 65 + 33 \cdot 52 = 39 \cdot 56,$$

ahonnan $P_3P_4 = 7{,}2$ (cm).

Csorba Ferenc, Győr
Nagy Béla, Sarkad

A megoldók száma: 6.

249. Van-e olyan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens végtelen sor, melyre a $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sgn} a_n \cdot a_n^2)$ sor divergens?

Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás: A feladat kérdésére a válasz igenlő, ezt a következő példa igazolja. Tekintsük az

$$1-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots$$

sort, ennek összege 0, tehát konvergens (de nem abszolút konvergens). Alakítsuk a következőképpen:

$$1-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots .$$

Az általános tag

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{k}}, & \text{ha } n = \dfrac{k(k+1)}{2} \\ -\dfrac{1}{k\cdot\sqrt{k}}, & \text{ha } \dfrac{k(k+1)}{2} < n < \dfrac{(k+1)(k+2)}{2} \end{cases}.$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor tehát a következő:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{1\cdot\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}-\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}+$$

$$+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}\underbrace{-\frac{1}{k\cdot\sqrt{k}}-\ldots-\frac{1}{k\cdot\sqrt{k}}}_{k \text{ db tag}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\ldots .$$

Erre a sorra

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{sgn} a_n \cdot a_n^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot |a_n|\right) =$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{k} - k \cdot \frac{1}{k^3} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right).$$

Ez a sor divergens, hiszen a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor (harmonikus sor) divergens, a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ sor pedig konvergens, így a $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - c_k)$ sor divergens.

Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 5.

A megoldók névsora: Csorba Ferenc, Győr (247., 248.); Dályay Pál Péter, Szeged (245-249.); Kamarás Lajos, Pécs (245-249.); Kiss Zoltán, Pécs (245-249.); Nagy Béla, Sarkad (245., 247., 248.); Rakonczai György, Budapest (245-247., 249.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (245-247., 249.); Varga Nóra, Sarkad (247.); Zachar Zoltán, Tatabánya (245-249.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár (245-247.).

NAT 2003
AJÁNLOTT TANTERV

A közoktatásról szóló törvény szerint 2004-ben az iskolák új pedagógiai programot, illetve a NAT 2003 alapján helyi tantervet készítenek. Az iskola az oktatási miniszter által kihirdetett kerettantervek alapján elkészítheti helyi tantervét. A Mozaik Kiadó által készített kerettantervrendszert az OM akkreditálta, és nyomtatásban megjelent a 17/2004. (V. 20.) rendelet mellékleteként az Oktatási Közlöny 2004/68. számának 593-1488. oldalán. A kerettanterv letölthető az OM honlapjáról, valamint a www.mozaik.info.hu címről.

MOZAIK – NAT 2003
Kerettantervrendszer
www.mozaik.info.hu

A SZÉP MAGYAR KÖNYV VERSENY TÖBBSZÖRÖSEN DÍJAZOTT SOROZATA

MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu

MOZAIK